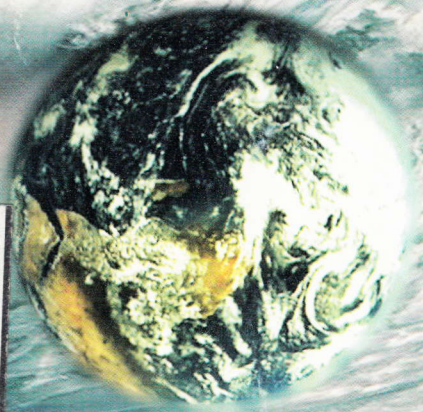
Benjamin Lumantarna

Pengantar
ANALISIS DINAMIS DAN GEMPA



PERPUSTAKAAN
SI JAWA TIMUR
9.4
M
1

LPPM
Universitas Kristen PETRA Surabaya

Penerbit ANDI Yogyakarta

Pengantar
ANALISIS DINAMIS DAN GEMPA

Benjamin Lumantarna

Diterbitkan Atas Kerjasama

LPPM
Universitas Kristen PETRA Surabaya

Penerbit ANDI Yogyakarta

MILIK
Badan Perpustakaan
Propinsi Jawa Timur
275.710/BPP/P/02.

Pengantar Analisis Dinamis dan Gempa
Oleh: Benjamin Lumantarna

Hak Cipta © 2000 pada penulis,
Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, tanpa izin tertulis dari penulis.

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, 2000
Cetakan Kedua, 2001

Penerbit:
Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
Universitas Kristen PETRA Surabaya

dan

ANDI
Jl. Beo 38-40,
Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax (0274) 588282
Yogyakarta 55281

Percetakan:
ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40,
Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax (0274) 588282
Yogyakarta 55281

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan

LUMANTARNA, Benjamin
Pengantar analisis dinamis dan gempa/Benjamin Lumantarna - Ed. 1. Cet. 2 - Yogyakarta: Andi, 2001
viii+ 108 hlm .; 16 x 23 cm.

Diterbitkan atas kerja sama Lembaga Penelitan dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Kristen Petra Surabaya

ISBN: 979-533-664-9

I. Judul
1. ANALISIS DINAMIS
2. GEMPA

DDC'21: 624.1762

PROYEK T.A. 2002

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan perkembangan dari diktat kuliah dasar-dasar Perencanaan Bangunan Tanah Gempa yang diberikan pada Fakultas Teknik Jurusan Sipil Universitas Kristen Petra sejak tahun 1980.

Materi dari buku ini dibagi menjadi dua bagian besar, yaitu Analisis Struktur Secara Dinamis dan Dasar-dasar Perencanaan Bangunan Terhadap Gempa. Bagian Pertama, membicarakan dasar-dasar perhitungan struktur dengan pembebanan dinamis baik secara eksak maupun dengan cara pendekatan. Bagian Kedua membicarakan dasar-dasar perencanaan bangunan terhadap gempa dengan perhitungan secara dinamis.

Buku ini diharapkan dapat menjadi batu loncatan untuk mempelajari analisis dinamis maupun perencanaan bangunan terhadap gempa secara lebih mendalam.

Surabaya, April 1999

Benjamin Lumantarna

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iii
DAFTAR ISI v
BAGIAN PERTAMA
ANALISIS STRUKTUR SECARA DINAMIS 1
1.1 Pendahuluan 1
1.2 Idealisasi Struktur Dengan Massa Dan Per 2
1.3 Struktur Elastis Dengan Derajat Kebebasan Satu 3
1.3.1 Integrasi dengan Cara Numerik 4
1.3.2 Contoh Perhitungan dan Soal-soal Latihan 8
1.3.3 Cara Numerik Lain 12
1.3.3.1 Cara Percepatan dan Kecepatan Linier 12
1.3.3.2 Cara β dari New Mark 13
1.4 Struktur Elastis Dengan Derajat Kebebasan Banyak 14
1.4.1 Contoh Perhitungan 16
1.5 Struktur Elastoplastis Dengan Derajat Kebebasan Satu 20
1.5.1 Contoh Perhitungan 21
1.6 Penyelesaian Analitis Struktur Elastis Tanpa Damping Dengan Derajat Kebebasan Satu 23
1.6.1 Getaran Bebas 24
1.6.1.1 Natural Period 25
1.6.1.2 Natural Frequency 26
1.6.2 Getaran Tak Bebas 26
1.6.2.1 Beban Impuls 27
1.6.2.2 Beban Sebarang 28
1.6.3 Faktor Beban Dinamis 29
1.6.3.1 Contoh Perhitungan 30

1.6.4 Gerakan pada Pondasi 37
1.7 Penyelesaian Analitis Struktur Elastis Dengan Damping Dengan Derajat Kebebasan Satu 38
1.7.1 Getaran Bebas dengan Damping 40
1.7.1.1 Dua Akar Nyata, $\beta > 1$ 41
1.7.1.2 Dua Akar Imajiner, $\beta < 1$ 41
1.7.1.3 Satu Akar Nyata, $\beta = 1$ 43
1.7.1.4 Karakteristik Struktur dengan Damping 43
1.7.2 Getaran Tak Bebas dengan Damping 45
1.7.3 Getaran Tak Bebas dengan Beban Harmonis 45
1.8 Penyelesaian Analitis Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak 50
1.8.1 Getaran Bebas Struktur dengan Derajat Kebebasan Dua 50
1.8.2 Getaran Bebas Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak 54
1.8.3 Natural Frequency dan Mode Shape 55
1.8.3.1 Cara Holzer 55
1.8.3.2 Cara Jacobi 62
1.8.4 Sifat Orthogonal Mode Shape 64
1.8.5 Persamaan Modal 66
1.8.6 Struktur Berderajat Kebebasan Banyak dengan Damping 68
1.8.7 Gerakan pada Pondasi 69

BAGIAN KEDUA
DASAR PERENCANAAN BANGUNAN TERHADAP GEMPA 71
2.1 Pendahuluan 71
2.1.1 Struktur Bumi dan Daerah Gempa 72
2.1.2 Istilah-istilah yang Banyak Digunakan 73
2.1.2.1 Seismograph 73
2.1.2.2 Seismogram 73
2.1.2.3 Focus atau Hypocenter dan Epicenter 76
2.1.3 Mekanisme Terjadinya Gempa 76
2.1.4 Ukuran Gempa 78
2.1.4.1 Magnitude 79
2.1.4.2 Energy 79
2.1.4.3 Intensity 80
2.2 Perencanaan 81
2.2.1 Response Spectrum 83
2.2.2 Modal Analysis 93

2.3 Hal-Hal Yang Harus Diperhatikan Dalam Perencanaan 94
DAFTAR PUSTAKA 99
APPENDIKS 101
INDEKS 105

BAGIAN PERTAMA

ANALISIS STRUKTUR SECARA DINAMIS

1.1 PENDAHULUAN

Dalam bagian ini akan dibahas dasar-dasar analisis dan perencanaan struktur terhadap beban dinamis, yaitu suatu beban yang berubah-ubah sesuai dengan waktu.

Meskipun sebagian besar dari bangunan sipil dapat direncanakan dengan baik dengan memakai anggapan bahwa beban yang dipikul adalah suatu beban statis, namun ada beberapa hal di mana perhitungan secara statis tidak dapat dipergunakan. Misalnya:

a. Pembebanan akibat getaran mesin;
b. Pembebanan akibat beban bergerak, seperti beban yang terjadi akibat beban kendaraan yang bergerak pada jembatan;
c. Pembebanan impak, seperti akibat ledakan; dan
d. Pembebanan akibat terjadinya gempa.

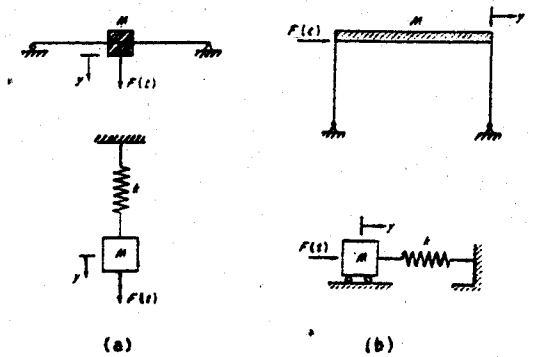
Sebenarnya tidak ada satu bebanpun yang dapat dikatakan statis, kecuali berat sendiri. Namun demikian jelas bahwa bila perubahan beban cukup kecil (perlahan-lahan), maka efek dinamis tidak akan terjadi. Dengan demikian beban tersebut dapat dianggap sebagai beban statis. Seperti akan dibicarakan lebih lanjut dalam bagian lain buku ini, ternyata bahwa waktu getar (*natural period*) dari bangunan adalah suatu parameter yang sangat penting. Besar atau kecilnya suatu perubahan pembebanan harus dibandingkan dengan waktu getar untuk menentukan apakah suatu pembebanan bersifat dinamis atau statis. Waktu

getar secara sederhana dapat didefinisikan sebagai waktu yang dibutuhkan oleh suatu bangunan untuk melakukan satu siklus getaran.

Pembahasan analisis dinamis dimulai dengan idealisasi dari struktur yang kemudian dilanjutkan dengan pembahasan penyelesaian dengan menggunakan cara numerik (*numerical analysis*). Hal ini dilakukan karena pada umumnya tidak ada satu beban dinamis pun yang dapat dinyatakan dalam suatu bentuk matematis yang sederhana sehingga dapat diselesaikan secara eksak. Penyelesaian dengan cara numerik ini dibahas terlebih dahulu agar pembaca tidak tenggelam dalam rumus-rumus matematika sehingga kehilangan pengertian fisik dari persoalan yang dihadapi. Dengan demikian pembaca diharapkan akan dapat merasakan arti fisik dari bermacam-macam pembebanan dan merasakan perbedaan antara analisis statis dan dinamis sedini mungkin sebelum menggumuli penyelesaian eksak yang lebih sulit.

1.2 IDEALISASI STRUKTUR DENGAN MASSA DAN PER

Pada umumnya struktur-struktur yang akan ditinjau selalu dapat diidealisasikan sebagai hubungan massa dan per sebagaimana dapat dilihat dalam Gambar 1. Gambar 1.a menunjukkan suatu massa M yang diletakkan di atas suatu balok yang terletak di atas dua buah perletakan dan dibebani dengan suatu beban dinamis F(t). Struktur ini dapat diidealisasikan sebagai suatu sistem massa dan per yang mempunyai massa sebesar M [kg] dan konstanta per sebesar k [N/m] dengan beban F(t) [N]. Gambar 1.b menunjukkan suatu portal yang juga diidealisasikan dengan massa dan per.



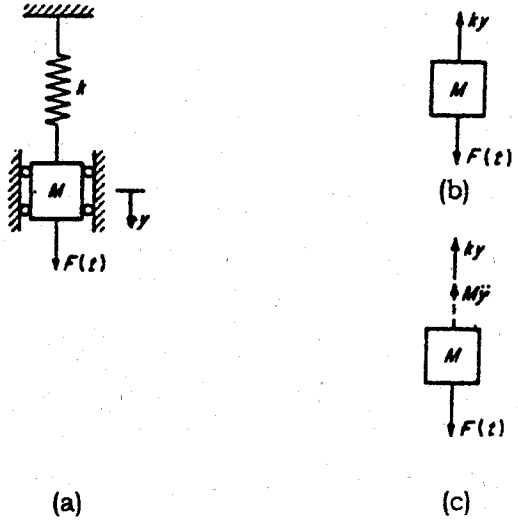
Gambar 1. *Idealisasi massa dan per*

Konstanta per k dicari dari kekakuan struktur yang bersangkutan, yaitu dengan mencari besar gaya yang dibutuhkan untuk menyebabkan pergeseran (*deflection*) sebesar satu satuan. Cara mencari konstanta per ini akan dibicarakan lebih lanjut dalam bagian lain buku ini.

Cara idealisasi struktur dengan massa dan per ini tidak dapat dipakai bila massa struktur yang ditinjau terbagi rata pada seluruh struktur. Untuk mempelajari analisis dinamis untuk struktur dengan massa yang merata, pembaca disarankan untuk mempelajari referensi pada daftar pustaka [1, 2, 3].

1.3 STRUKTUR ELASTIS DENGAN DERAJAT KEBEBASAN SATU

Struktur dengan derajat kebebasan satu (*Single Degree of Freedom Sytem*, SDOF) adalah suatu struktur yang hanya dapat bergerak dalam satu arah sehingga kedudukan dari sistem tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan satu koordinat. Keadaan ini ditunjukkan dalam Gambar 2 di mana massa M hanya dapat bergerak dalam arah vertikal (sumbu Y).



Gambar 2. *Struktur elastis dengan derajat kebebasan satu*

Persamaan gerak (yang merupakan persamaan diferensial) dari sistem ini dapat dicari dengan menggunakan persamaan keseimbangan gaya sebagai berikut (gambar 26):

$$F(t) - k\,y = M\,\ddot{y} \qquad (1)$$

Dalam persamaan di atas dua titik di atas $\ddot{y}$ menyatakan turunan kedua dari y, atau dalam hal ini adalah percepatan massa M dalam arah y.

Cara lain untuk mendapatkan persamaan 1 di atas ialah dengan menggunakan prinsip D'Alembert untuk keseimbangan dinamis (*Dynamic Equilibrium*). Dalam prinsip ini pada suatu massa yang bergerak diberikan suatu gaya imajiner yang berupa gaya inersia (*inertia force*) sebesar $M\,\ddot{y}$ dalam arah yang berlawanan dengan arah gerak. Problema tersebut kemudian dapat dipandang sebagai suatu problema statis (Gambar 2.c). Dengan demikian akan diperoleh persamaan gerak sistem tersebut sebagai:

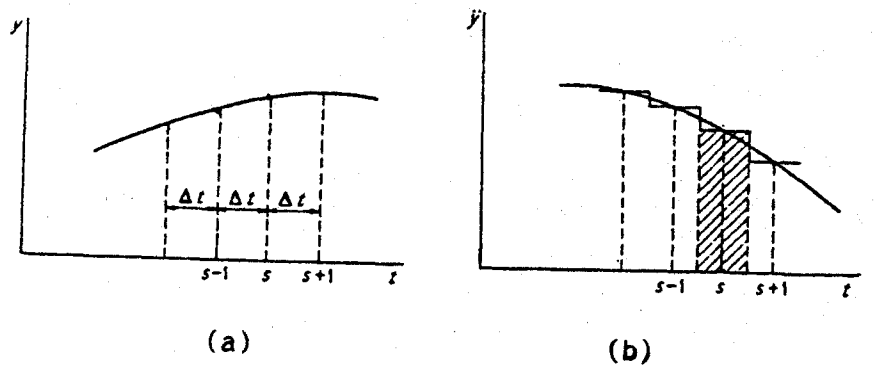
$$F(t) - k\,y - M\,\ddot{y} = 0 \qquad (2)$$

Jelas bahwa persamaan 2 sama dengan persamaan 1.

Persamaan gerak 1 dan 2 yang merupakan persamaan diferensial, dalam hal-hal tertentu dapat diselesaikan secara analitis. Namun demikian pada umumnya harus diselesaikan secara numerik, yaitu dengan menggunakan integrasi dengan cara numerik (*Numerical Integration*). Berikut ini akan dibahas penyelesaian persamaan diferensial dengan integrasi dengan cara numerik.

1.3.1 Integrasi dengan Cara Numerik

Ada bermacam-macam cara yang dapat digunakan dalam cara numerik ini. Secara umum penyelesaian dengan cara numerik menyelesaikan persamaan diferensial setapak demi setapak (*step by step*) dimulai dari waktu t = 0 di mana keadaan awal (*Initial Conditions*), perpindahan tempat dan percepatan biasanya diketahui. Dalam cara ini kurun waktu yang akan diselesaikan dibagi-bagi dalam suatu interval waktu tertentu, δt, untuk kemudian diselesaikan secara berturut-turut dari satu waktu ke waktu berikutnya. Untuk bergerak dari waktu ke waktu ini dapat digunakan bermacam-macam anggapan. Dalam bagian ini akan dibahas suatu cara yang sangat sederhana, yaitu cara Kecepatan Tetap (*Constant Velocity*).



(a) (b)

Gambar 3. *Constant Velocity*

Dalam cara Kecepatan Tetap ini dalam suatu interval waktu tertentu, δt, kecepatan y dianggap tetap (konstan). Untuk mempelajari cara ini perhatikan Gambar 3. Gambar 3.a menunjukkan hubungan antara perpindahan tempat, y, terhadap waktu, t. Sedangkan Gambar 3.b menunjukkan hubungan antara percepatan, $\ddot{y}$, terhadap waktu, t. Misalnya, telah diketahui, y_s, perpindahan tempat pada waktu $t = t_s$ dan y_{s-1}, perpindahan tempat pada waktu $t = t_{s-1}$ maka percepatan pada waktu $t = t_s$, $\ddot{y}_s$, dapat diperoleh dari persamaan gerak (1,2) sebagai:

$$\ddot{y}_s = \left(F(t_s) - k\,y(t_s)\right)/M \qquad (3)$$

Dengan menganggap bahwa kecepatan dalam suatu interval waktu adalah tetap maka perpindahan tempat y dalam interval waktu tersebut merupakan suatu fungsi linier sehingga y pada waktu $t = t_{s+1}$ dapat ditulis sebagai:

$$y_{s+1} = y_s + \dot{y}_{av}\,\delta t \qquad (4)$$

Di mana $\dot{y}_{av}$ adalah kecepatan rata-rata dari $t = t_{s-1}$ sampai $t = t_s$:

$$\dot{y}_{av} = \left(y_s - y_{s-1}\right)/\delta t + \ddot{y}_s\,\delta t \qquad (5)$$

Dengan memperhatikan persamaan 5, persamaan 4 dapat diubah menjadi:

$$y_{s+1} = 2\,y_s - y_{s-1} + \ddot{y}\,(\delta t)^2 \qquad (6)$$

Persamaan 6 berarti bila perpindahan tempat pada dua waktu yang berurutan, yaitu pada waktu $t = t_s$, y_s, dan waktu $t = t_{s-1}$, y_{s-1}, telah diketahui, perpindahan tempat yang berikutnya, waktu $t = t_{s+1}$ juga dapat dicari.

Dengan demikian perpindahan tempat dari sistem yang ditinjau dapat dicari setapak demi setapak dengan menggunakan persamaan 6 bila perpindahan tempat awal (*initial displacement*) dan satu perpindahan tempat yang berikutnya telah diketahui.

Dua cara untuk mendapatkan dua perpindahan tempat yang pertama akan dibahas berikut ini. Pada cara yang pertama, pada saat $t = t_0$, keadaan awal dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_0 = 0$$

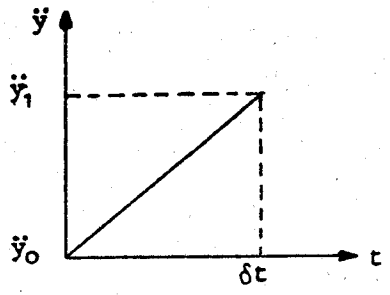
$$y_0 = 0 \qquad (7)$$

$$\ddot{y}_0 = F(0)/M$$

Karena percepatan dianggap tetap dalam satu interval, maka:

$$y_1 = 0.5\,\ddot{y}_o\,(\delta t)^2 \qquad (8)$$

Dalam cara yang kedua, percepatan dianggap berubah secara linier sampai akhir dari interval yang pertama. Dengan demikian bila percepatan awal $\ddot{y}_0$ adalah nol, y_1 dapat diperoleh sebagai berikut (Lihat Gambar 4):



Gambar 4: *Keadaan awal*

Dari $t = t_0$ sampai dengan $t = t_1$,

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_1(t/\delta t) \qquad (9)$$

Sedangkan:

$$y(t) = \iint \ddot{y}(t)\,dt\,dt \qquad (10)$$

Dengan mempergunakan batas-batas integrasi 0 dan δt dan memperhatikan persamaan 9, persamaan 10 dapat diselesaikan sebagai:

$$y_1 = 1/6\,\ddot{y}_1\,(\delta t)^2 \qquad (11)$$

Perhatikan bahwa persamaan 11 ini memerlukan iterasi karena $\ddot{y}_1$ tergantung pada y_1 (persamaan 3).

Biggs[1] menganggap bila beban dinamis yang diberikan F(t) adalah nol pada keadaan awal, cara kedua harus digunakan karena percepatan awal $\ddot{y}_0$ adalah nol sehingga y_1 juga nol. Tetapi bila kita perhatikan bahwa interval waktu δt yang dipergunakan tentunya cukup kecil maka kesalahan yang akan terjadi dengan menganggap y_1 adalah nol tidaklah terlalu berarti. Dengan argumentasi yang sama, iterasi dalam persamaan 11 juga dapat dihindari bila:

$$\ddot{y}_1 = F(1)/M \qquad (12)$$

Ketelitian cara analisis numerik sangat tergantung dari pengambilan interval δt. Semakin kecil interval yang dipilih akan semakin teliti hasil perhitungannya. Pemilihan besar interval ini dapat dilakukan dengan cara mencoba-coba sampai akhirnya didapatkan hasil yang optimum. Biggs[1] menganjurkan untuk memakai interval δt sebesar sepersepuluh dari natural period, T, dari sistem yang ditinjau.

Natural period, T, dari suatu sistem dengan derajat kebebasan satu dapat dihitung sebagai berikut:

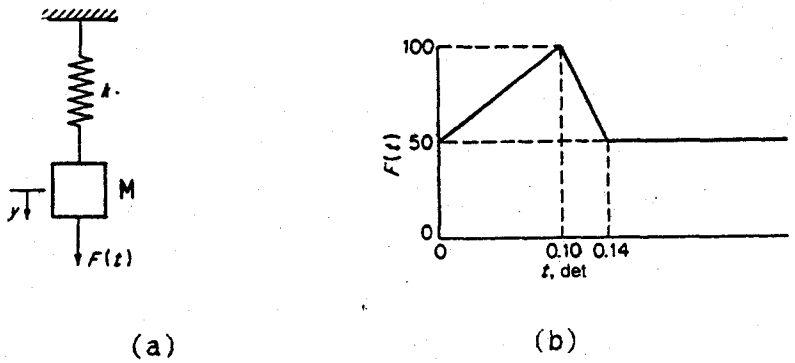
$$T = 2\,\pi\,(M/k)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

Penurunan rumus tersebut diatas akan dibicarakan dalam bagian lain buku ini.

MILIK
Badan Perpustakaan
Propinsi Jawa Timur

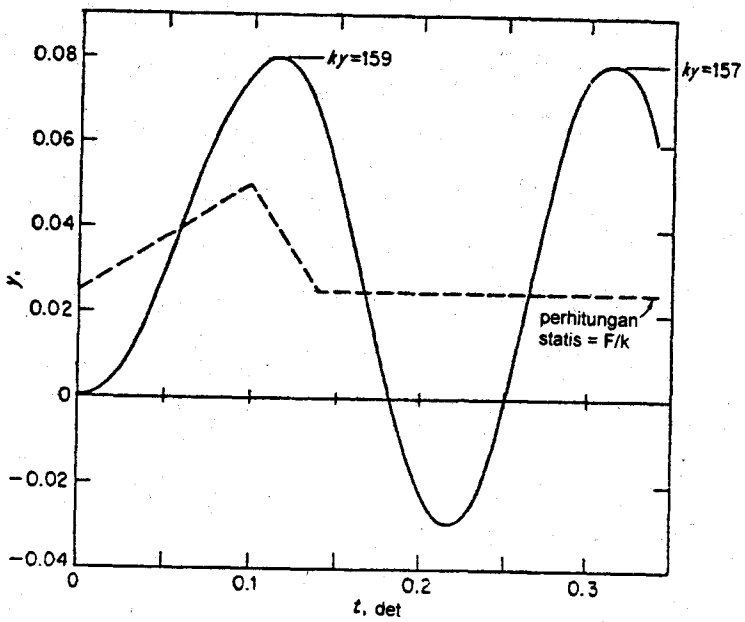
1.3.2 Contoh Perhitungan dan Soal-soal Latihan

Untuk mendalami lebih lanjut cara perhitungan numerik ini, akan dibahas suatu sistem elastis dengan derajat kebebasan satu yang mempunyai massa sebesar 2 kg dan kekakuan per sebesar 2000 N/m seperti terlihat dalam Gambar 5.a yang dibebani dengan beban dinamis F(t) seperti terlihat dalam Gambar 5.b. Beban tersebut diberikan dari keadaan tidak bergerak.



Gambar 5. *Contoh*

Natural period sistem tersebut dapat diperoleh dari rumus 13 sebesar 0.198 detik sehingga interval waktu δt dipilih sebesar 0,02 detik. Karena sistem dalam keadaan awal tidak bergerak maka untuk t = 0,0 detik, y = 0,0 m dan untuk t = 0,02 detik (interval pertama), y dapat dicari dari rumus 8 sebesar 0,005 m. Selanjutnya dapat dicari percepatan pada waktu t = 0,02 detik, $\ddot{y}_1$, dari rumus 3. Setelah $\ddot{y}_1$ dicari maka perhitungan dapat dilanjutkan untuk langkah berikutnya, yaitu untuk t = 0,04 detik. Perpindahan tempat untuk t = 0,04 detik, y_2, dapat dihitung dengan rumus 6, kemudian dicari $\ddot{y}_2$ Selanjutnya perhitungan dapat dilakukan setapak demi setapak sampai waktu yang dikehendaki. Penyelesaian soal ini sampai t = 0,34 detik ditunjukkan dalam Tabel 1 yang secara grafis dapat dilihat dalam Gambar 6. Suatu program komputer sederhana untuk menyelesaikan soal ini dapat dilihat dalam Apendiks I.



Gambar 6. *Respons contoh 1*

Dalam Gambar 6, garis yang terpotong-potong menunjukkan perpindahan tempat bila soal tersebut di atas diselesaikan secara statis. Perhatikan bahwa perpindahan tempat maksimum yang terjadi bila diperhitungkan secara dinamis adalah 1,59 kali lebih besar dari perpindahan maksimum yang terjadi bila diperhitungkan secara statis. Karena gaya yang terjadi dalam per untuk keadaan linier elastis adalah berbanding lurus dengan besarnya perpindahan tempat maka gaya yang terjadi dalam per juga 1,59 kali lebih besar dari gaya (luar) statis maksimum. Perhatikan pula bahwa setelah beban menjadi konstan maka gaya dalam per berubah-ubah secara sinusoidal.

Gerakan yang terjadi pada massa sistem dinamis yang ditinjau dapat dihitung dan dilihat dengan menggunakan program Gempa ii yang dibuat oleh Raharjo dan Stevanus [6].

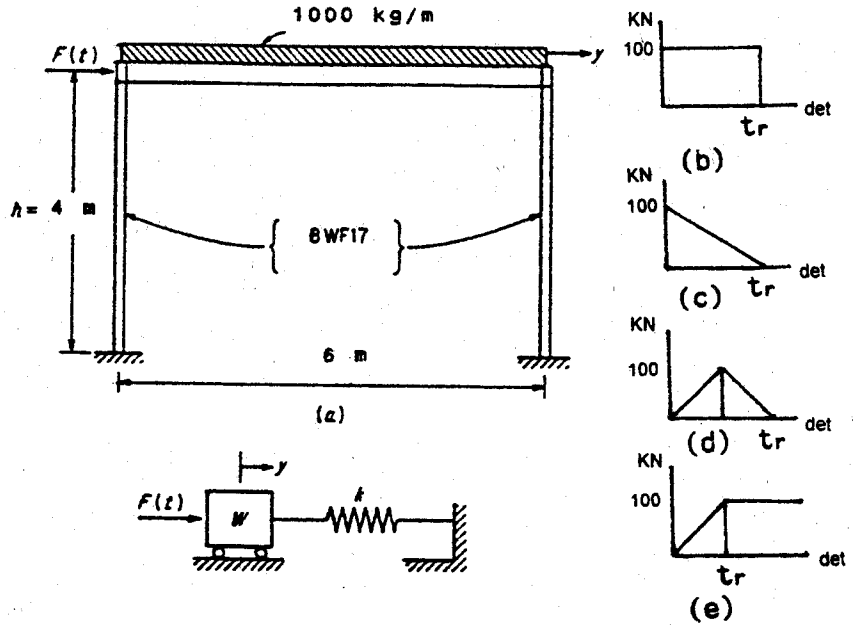
Tabel 1:

t sec	½ f(t)	1000 y	ÿ (rumus 7)	ÿ $(\Delta t)^2$	y (rumus 6)
0.0	25	0	25.0	0.0100	0
0.02	30	5.0	25.0	0.0100	0.0050*
0.04	35	20.0	15.0	0.0060	0.0200
0.06	40	41.0	-1.0	-0.0004	0.0410
0.08	45	61.0	-16.6	-0.0066	0.0616
0.10	50	75.6	-25.6	-0.0102	0.0756
0.12	37.5	79.4	-41.9	-0.0168	0.0794
0.14	25	66.4	-41.4	-0.0166	0.0664
0.16	25	36.8	-11.8	-0.0047	0.0368
0.18	25	2.5	22.5	0.0090	0.0025
0.20	25	-22.8	47.8	0.0191	-0.0228
0.22	25	-29.0	54.0	0.0216	-0.0290
0.24	25	-13.6	38.6	0.0154	-0.0136
0.26	25	17.2	7.8	0.0031	0.0172
0.28	25	51.1	-26.1	-0.0104	0.0511
0.30	25	74.6	-49.6	-0.0198	0.0746
0.32	25	78.3	-53.3	-0.0123	0.0783
0.34	....	.....	.....	.....	0.0607

* rumus 8

Soal-soal Latihan

1. Sistem elastis dengan derajat kebebasan satu seperti Gambar 7.a dibebani dengan bermacam-macam beban seperti terlihat dalam Gambar 7.b sampai dengan 7.e. Carilah gerakan (response) sistem tersebut dengan menggunakan cara numerik untuk bermacam-macam variasi dari t_r/T: 0,1, 0,25, 0,5, 1,0 dan 2,0, dan $\delta t/T$ sebesar 0,1 dan 0,2.



Gambar 7.

2. Untuk sistem elastis seperti soal 1 tersebut gunakanlah bermacam-macam cara untuk mencari perpindahan tempat untuk interval yang pertama, y_1, kemudian bandingkanlah dengan hasil yang didapatkan dalam soal 1.
3. Suatu sistem elastis dengan derajat kebebasan satu diketahui mempunyai natural period sebesar 1 detik. Bila untuk pembebanan seperti terlihat dalam Gambar 7.c didapatkan perpindahan tempat statis maksimum sebesar 2 cm, tulislah persamaan gerak sistem tersebut dan kemudian carilah gerakan sistem tersebut dengan menggunakan cara numerik.

1.3.3 Cara Numerik Lain

Cara kecepatan konstan yang telah dibahas di atas merupakan cara sederhana yang dapat memberikan hasil yang cukup baik dengan memakai interval waktu yang cukup kecil. Selain cara kecepatan konstan tersebut masih terdapat banyak cara numerik lain [1, 3, 7, 8] yang dapat dipakai, antara lain: Cara percepatan dan kecepatan linier dan cara β Newmark.

1.3.3.1 Cara Percepatan dan Kecepatan Linier

Pada umumnya bila percepatan dianggap linier maka kecepatan akan dianggap kuadratis (Lihat cara percepatan linier dalam Daftar Pustaka, 1 dan 8). Dalam cara ini [7, 8], meskipun percepatan dianggap sebagai sesuatu yang linier, kecepatan juga tetap dianggap linier, sehingga hubungan antara percepatan dan kecepatan dengan perpindahan tempat dalam suatu interval dapat diturunkan sebagai berikut. Perhatikan Gambar 8 yang dapat dianggap sebagai grafik dari fungsi percepatan maupun kecepatan terhadap waktu. Kecepatan pada waktu t_2, $\dot{y}_2$, dapat diperoleh dari kecepatan pada waktu t_1, $\dot{y}_1$, dan percepatan pada interval waktu tersebut sebagai:

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \int \ddot{y}\, dt \qquad (14)$$

Bila percepatan dalam interval waktu δt dianggap linier maka integrasi dalam persamaan 14 di atas, yang merupakan luas di bawah fungsi yang diintegrasikan, dapat diganti dengan $(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1)\ \delta t/2$ sehingga persamaan 14 dapat diganti menjadi:

$$\ddot{y}_2 = 2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)/\delta t - \ddot{y}_1 \qquad (15)$$

Dengan menganggap bahwa kecepatan dalam interval waktu δt linier, maka dengan cara yang sama akan diperoleh:

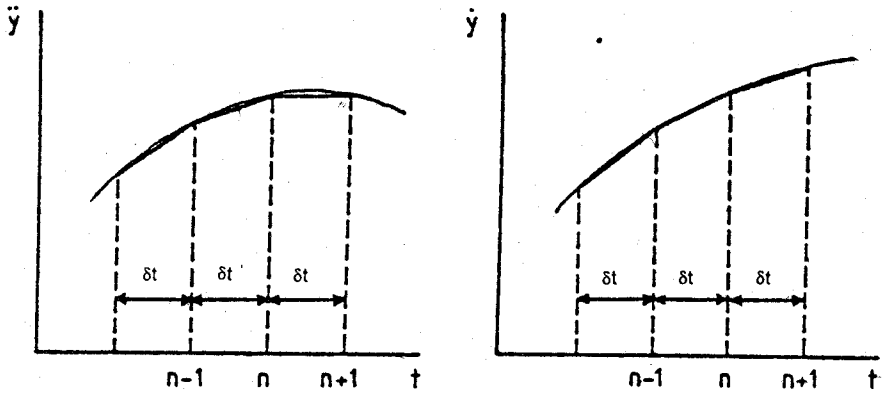
$$\dot{y}_2 = 2(y_2 - y_1)/\delta t - \dot{y}_1 \qquad (16)$$

Dengan menggunakan persamaan 15 dan 16, persamaan gerak (2) untuk t = t_2 menghasilkan:

$$\left(4M/(\delta t)^2 + k\right)y_2 = 4M/(\delta t)^2\ y_1 + 2M/(\delta t)\,y_1 + M\,\ddot{y}_1 + F(t_2) \qquad (17)$$

Persamaan 17 menunjukkan bahwa y_2 atau y_n dapat diperoleh bila data sebelumnya y_1 atau y_{n-1} diketahui.

Cara ini dalam beberapa kasus telah dibuktikan memberikan hasil yang sangat baik [7, 8].



Gambar 8. *Percepatan dan kecepatan linier*

1.3.3.2 Cara β dari Newmark

Cara yang dikembangkan oleh Newmark [1, 3, 8] ini dapat dituliskan sebagai berikut:

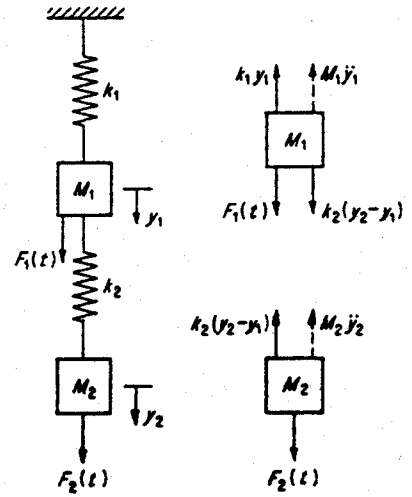
$$y_2 = y_1 + \delta t\,(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)/2 \text{ dan}$$

$$y_2 = y_1 + \delta t\, y_1 + (0.5 - \beta)\ddot{y}_1\,(\delta t)^2 + \beta\,\ddot{y}_2\,2(\delta t)^2 \qquad (18)$$

Dalam persamaan di atas, β merupakan suatu variabel yang menyatakan variasi dari percepatan dalam suatu interval waktu. Newmark, dalam penelitian yang telah dilakukannya [3], menyimpulkan bahwa hasil yang terbaik dapat dicapai dengan memakai β antara 1/6 sampai dengan 1/4 dan internal waktu δt antara 1/6 sampai dengan 1/5 dari Natural Period yang terpendek. Penyelidikan lebih lanjut menunjukkan bahwa β sebesar 1/6 merupakan cara percepatan linier (dan kecepatan kuadratis) [3].

1.4 STRUKTUR ELASTIS DENGAN DERAJAT KEBEBASAN BANYAK

Setelah mempelajari struktur elastis dengan derajat kebebasan satu, struktur elastis dengan derajat kebebasan banyak (*Multi Degree of Freedom System*, MDOF) adalah suatu perluasan yang sederhana. Untuk mempelajari hal ini, perhatikan suatu struktur elastis dengan derajat kebebasan dua seperti terlihat dalam Gambar 9. Persamaan gerak dari masing-masing massa dapat dengan mudah diperoleh dengan menggunakan cara keseimbangan dinamis sebagai berikut:



Gambar 9. *Struktur elastis dengan derajat kebebasan 2*

$$M_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0$$

$$M_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - F_2(t) = 0 \qquad (19)$$

yang dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{F} = 0 \qquad (20)$$

di mana:

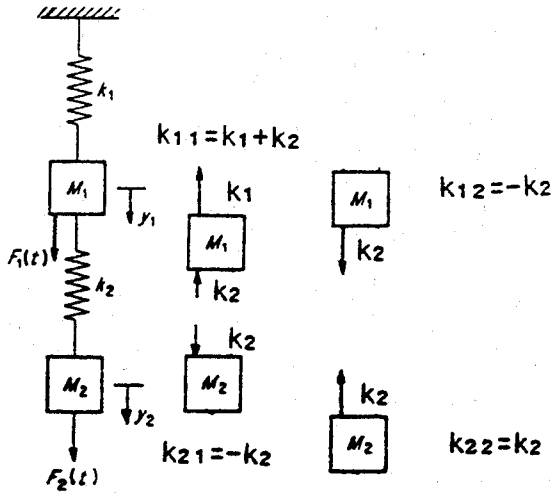
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T = (y_1 \quad y_2), \qquad \mathbf{F}^T = (F_1(t) \quad F_2(t))$$

Dalam persamaan di atas dan selanjutnya, huruf yang ditebalkan merupakan tanda matriks. Matriks kekakuan **K** dapat dicari dengan mudah dengan memakai definisi dari angka kekakuan (perhatikan Gambar 10). Seperti telah diketahui, elemen-elemen dari matriks kekakuan **K**, k_{11}, k_{12}, k_{22} dan seterusnya mempunyai arti sebagai berikut:

kii: adalah gaya yang diperlukan pada massa i untuk memindahkan massa i sebanyak satu satuan bila semua massa yang lain ditahan pada tempatnya masing-masing.

kji: adalah gaya yang diperlukan untuk menahan massa j bila massa i dipindahkan sebanyak satu satuan sedangkan semua massa yang lain ditahan pada tempatnya masing-masing.



Gambar 10. *Mencari matriks kekakuan K*

Dengan berpedoman pada definisi ini maka k_{11}, k_{12} dan kekakuan-kekakuan lainnya dapat dicari dengan mudah seperti terlihat dalam Gambar 10.

Penyelesaian numerik persamaan gerak sistem dengan derajat kebebasan banyak dapat dengan mudah diturunkan dengan mengikuti cara yang digunakan pada sistem dengan derajat kebebasan satu.

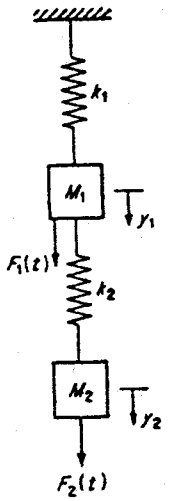
Untuk penjelasan lebih lanjut, perhatikan contoh perhitungan di bawah ini.

1.4.1 Contoh Perhitungan

$F_1(t) = 0$
$F_2(t) = 200$ N

$M_1 = 2$ kg
$M_2 = 1$ kg

$k_1 = 4000$ N/m
$k_2 = 2000$ N/m



Gambar 11. *Contoh*

Perhatikan sistem dinamis dengan derajat kebebasan dua seperti yang terlihat pada Gambar 11. Dari data yang terlihat pada Gambar 9, persamaan gerak dari sistem dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{t}) = 0 \qquad (21)$$

di mana:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = 1000 \begin{bmatrix} (4+2) & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^T = (0 \quad 200), \qquad \mathbf{y}^T = (y_1 \quad y_2)$$

atau:

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{K}^* \mathbf{y} + \mathbf{F}^* \qquad (22)$$

di mana:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1000 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = 1000 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = 200 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MILIK
Badan Perpustakaan
Propinsi Jawa Timur

Persamaan 6 yang diturunkan untuk sistem dinamis dengan derajat kebebasan satu juga berlaku untuk kedua perpindahan tempat, y_1 dan y_2 Dengan demikian dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_{s+1} = 2\mathbf{y}_s - \mathbf{y}_{s-1} + \ddot{\mathbf{y}}_s (\delta t)^2 \qquad (23)$$

Perlu diperhatikan di sini bahwa:

a. Karena sistem yang ditinjau mempunyai derajat kebebasan dua maka periode sistem ini ada dua buah, yang dalam hal ini adalah 0,2 detik dan 0,1 detik, sehingga interval waktu δt harus diambil 0,1 dari periode yang terkecil, yaitu 0,1*0,1 = 0,01 detik. Cara menghitung periode untuk struktur elastis dengan derajat kebebasan banyak akan dibicarakan kemudian.
b. Untuk y_{21}, karena adanya gaya pada M_2, dapat dipakai rumus 8:

$$y_{21} = 0.5\, \ddot{y}_{20} (\delta t)^2 \qquad (24)$$

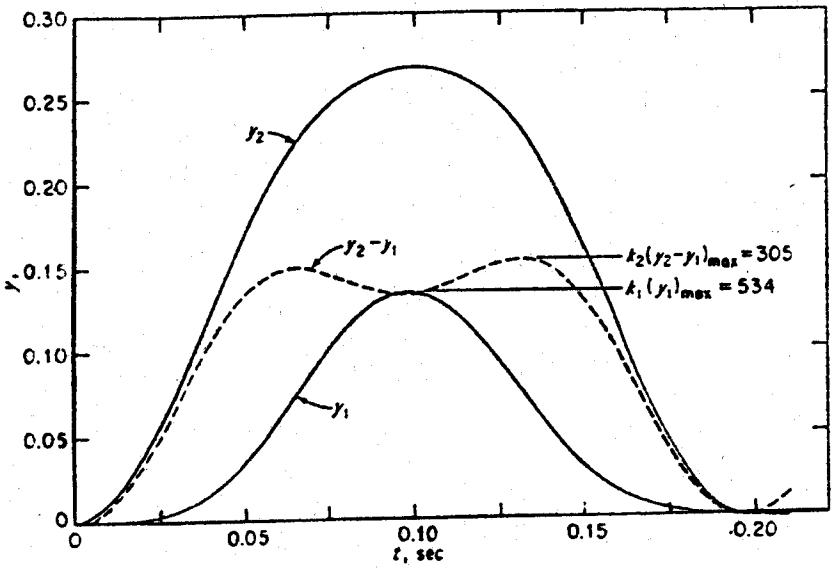
sedangkan untuk y_{11}, karena pada waktu t = 0, $F(t_0) = 0$, maka dapat dipakai rumus:

$$y_{11} = \ddot{y}_{11} (\delta t)^2 / 6 \qquad (25)$$

yang harus diselesaikan secara iterasi. Tetapi sekali lagi ditegaskan di sini, bila δt diambil cukup kecil, meskipun memakai rumus 24, di mana $y_{11} = 0$, maka tidak akan terdapat perbedaan yang besar.

Dalam variabel y_1 dan y_{21} di atas index pertama menunjukkan nomor massa. dan index kedua menunjukkan nomor langkah. Jadi y_{11} adalah perpindahan massa no 1 (M_1) pada langkah pertama, $t = t_1$.

Hasil perhitungan untuk contoh soal ini ditunjukkan dalam tabel 2, yang secara grafis ditunjukkan dalam Gambar 12. Bila Gambar 12 diperhatikan lebih lanjut maka akan terlihat bahwa perpindahan tempat y_1 dan y_2 berubah-ubah dalam bentuk yang hampir sinuspidal dengan periode ± 0.2 detik, yaitu natural period yang pertama (*fundamental period*). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa mode yang pertama (mode yang berhubungan dengan natural period yang pertama) memberikan pengaruh terbesar terhadap pergerakan dari sistem yang ditinjau. Hal ini akan dijelaskan lebih lanjut dalam bagian lain buku ini.



Gambar 12. *Simpangan massa 1 (y_1) dan massa 2 (y_2)*

Tabel 2:

t	$2000y_{21}$	$1000(y_{2-y1})$	$\ddot{y}_1$	$\ddot{y}_1(\delta t)^2$	y_1	$2000(y_1-y_1)$	$\ddot{y}_2$	$\ddot{y}_2(\delta t)^2$	y_2	y_2-y_1
0	0	0	0	0	0	0	200	0.0200	0	0
0.01	0	10	10	0.0010	0.0002*	20	180	0.0180	0.0100**	0.0098
0.02	3	37	34	0.0034	0.0014	73	127	0.0127	0.0380	0.0366
0.03	12	73	61	0.0061	0.0060	145	55	0.0055	0.0787	0.0727
0.04	33	108	75	0.0075	0.0167	216	-16	-0.0016	0.1249	0.1082
0.05	70	135	65	0.0065	0.0349	269	-69	-0.0069	0.1695	0.1346
0.06	119	148	29	0.0029	0.0596	295	-95	-0.0095	0.2072	0.1476
0.07	174	148	-26	-0.0026	0.0872	295	-96	-0.0096	0.2354	0.1482
0.08	224	142	-82	-0.0082	0.1122	284	-84	-0.0084	0.2540	0.1418
0.09	258	135	-123	-0.0123	0.1290	270	-70	-0.0070	0.2642	0.1352
0.10	267	134	-133	-0.0133	0.1335	268	-68	-0.0068	0.2674	0.1339
0.11	249	139	-110	-0.0110	0.1247	278	-78	-0.0078	0.2638	0.1391
0.12	210	147	-63	-0.0063	0.1049	295	-95	-0.0095	0.2524	0.1475
0.13	158	153	-5	-0.0005	0.0788	305	-105	-0.0105	0.2315	0.1527
0.14	104	148	44	0.0044	0.0522	296	-96	-0.0096	0.2001	0.1479
0.15	60	129	69	0.0069	0.0300	258	-58	-0.0058	0.1591	0.1291
0.16	29	98	69	0.0069	0.0147	195	5	0.0005	0.1123	0.0976
0.17	13	60	47	0.0047	0.0063	119	81	0.0081	0.0660	0.0597
0.18	5	25	20	0.0020	0.0026	50	150	0.0150	0.0278	0.0252
0.19	2	4	2	0.0002	0.0009	7	193	0.0193	0.0046	0.0037
0.20	-1	1	2	0.0002	-0.0006	3	197	0.0197	0.0007	0.0013
0.21	...	...	.....	.....	-0.0019	...	.....	.....	0.0165	0.0184

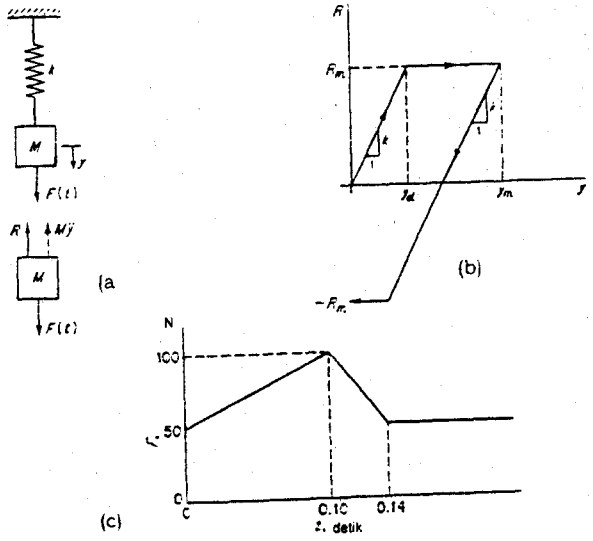
* $y_1 = \frac{1}{6}$ ($\ddot{y}$ pada waktu t = 0.01) $(\Delta t)^2$.

** + $y_2 = \frac{1}{4}$ ($\ddot{y}_2$ pada waktu t = 0) $(\Delta t)^2$.

Menarik juga untuk memperhatikan bahwa gaya per yang terjadi dalam per 1 adalah 2,67 kali lebih besar dari gaya yang diberikan. Gaya yang terjadi dalam per 2 adalah 1,53 kali lebih besar. Dari sini dapat diambil kesimpulan bahwa gaya yang ditimbulkan karena pembebanan yang diberikan secara tiba-tiba akan jauh lebih besar dari gaya yang terjadi bila pembebanan diperhitungkan secara statis.

1.5 STRUKTUR ELASTOPLASTIS DENGAN DERAJAT KEBEBASAN SATU

Suatu bahan dinamakan mempunyai sifat elastoplastis bila diagram tegangan-regangan (atau gaya-simpangan) dapat digambarkan seperti Gambar 13,b. Diagram gaya simpangan tersebut menunjukkan bahwa sebelum mencapai Rm (disebut batas elastis), per bersifat linier elastis, sedangkan setelah mencapai batas elastis, R_m, per menjadi plastis dan tidak dapat menerima tambahan gaya lebih lanjut. Setelah plastisitas tercapai, gaya yang diberikan dikurangi (dilakukan unloading) sehingga simpangan akan berkurang dengan sifat linier-elastis. Perhatikan bahwa meskipun gaya yang diberikan telah menjadi nol kembali, namun masih akan terdapat sisa simpangan yang tidak dapat kembali ke nol. Unloading ini dapat dilakukan terus sampai tercapai batas elastis dalam arah yang berlawanan, $-R_m$.



Gambar 13. *Struktur elastoplastis*

Perhatikan struktur dengan derajat kebebasan satu dengan per yang mempunyai sifat elastoplastis seperti terlihat dalam Gambar 13.a dan b. Bila struktur tersebut dibebani dengan gaya dinamis maka persamaan gerak struktur tersebut dapat ditulis sebagai:

$$M\ddot{y} + R - F(t) = 0 \qquad (26)$$

di mana untuk R berlaku batasan-batasan sebagai berikut:

$R = k\,y$ untuk $0 < y < y_{el}$

$R = R_m$ untuk $y_{el} < y < y_m$

$R = R_m - k(y_m - y)$ untuk $(y_m - 2\,y_{el}) < y < y_m$ (27)

Dalam rumus di atas y_{el} adalah batas elastis sedangkan R_m adalah gaya yang berhubungan dengan y_{el}. Rumus ketiga dalam persamaan 27 menunjukkan persamaan garis yang menyatakan adanya pengurangan gaya dalam per setelah tercapainya batas elastis (unloading). Persamaan gerak 26 dapat diselesaikan secara numerik dengan memperhatikan batasan-batasan dalam persamaan 27. Untuk mendalami lebih lanjut, perhatikan contoh perhitungan di bawah ini.

1.5.1 Contoh perhitungan

Misalkan dalam sistem yang terlihat dalam Gambar 13.0, massa M adalah 2 kg, kekakuan per 2000 kN/m sedangkan batas elastis, R_m, adalah 110 N, maka $y_{el} = R_m/k = 0.055$ m dan persamaan gerak sistem tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\ddot{y} = 0.5\,F(t) - 0.5\,R \qquad (28)$$

di mana:

$0.5\,R = 1000\,y$ untuk $0 < y < 0.055$ m

$0.5\,R = 55$ N untuk $0.055\text{ m} < y < y_m$

$0.5\,R = 55 - 1000\,(y_m - y)$ untuk $(y_m - 0.11) < y < y_m$

Hasil perhitungan dengan menggunakan cara constant velocity ditunjukkan dalam Tabel 3, sedangkan gerakan massa ditunjukkan dalam Gambar 14. Grafik a menunjukkan respons statis, grafik b menunjukkan respons dinamis bila per bersifat linier elastis (tidak ada batas elastis) sedangkan grafik c menunjukkan respons dinamis bila per bersifat elastoplastis.

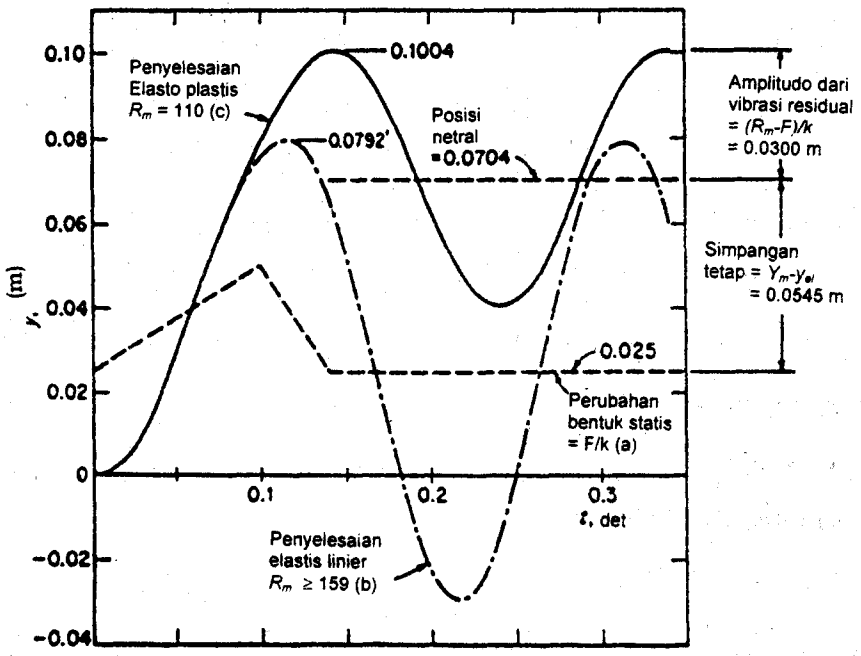
Tabel 3:

t sec	½ F(t)	½ R = 1000y, or 55	$\ddot{y}$	$\ddot{y}(\Delta t)^2$	y
0	25	0	25.0	0.0100	0
0.02	30	5.0	25.0	0.0100	0.0050
0.04	35	20.0	15.0	0.0060	0.0200
0.06	40	41.0	-1.0	-0.0004	0.0410
0.08	45	55.0	-10.0	-0.0616	0.0616
0.10	50	55.0	-5.0	-0.0020	0.0782
0.12	37.5	55.0	-17.5	-0.0070	0.0928
0.14	25	55.0	-30.0	-0.0120	0.1004
0.16	25	50.6*	-25.6	-0.0102	0.0960
0.18	25	36.0*	-11.0	-0.0044	0.0814
0.20	25	17.0*	8.0	0.0032	0.0624
0.22	25	1.2*	23.8	0.0095	0.0466
0.24	25	-5.1*	30.1	0.0120	0.0403
0.26	25	0.6*	24.4	0.0098	0.0460
0.28	25	16.1*	8.9	0.0036	0.0615
0.30	25	35.2*	-10.2	-0.0040	0.0806
0.32	25	50.3*	-25.3	-0.0101	0.0957
0.34	.....	.....	.....	.....	0.1007

* ½ R = 55 – 1000(0.1004-y).

Perhatikan bahwa dalam melakukan perhitungan (Tabel 3) selalu harus diperhatikan batas-batas yang diberikan dalam persamaan 28. Misalnya pada saat t = 0,08 detik, 0.5 R telah mencapai 61,6 N, hal ini tidak mungkin sehingga untuk harga 0,5 R harus dipakai 55 N. Unloading pada saat t = 0,16 detik, terlihat dengan turunnya y dari 0,1004 menjadi 0,0960. Dengan demikian untuk perumusan 0,5 R berlaku perumusan ketiga.

Perhatikan pula bahwa respons elastis memberikan simpangan yang lebih kecil tetapi memberikan gaya per yang lebih besar dari respons elastoplastis. Terlihat juga dari Gambar 14 bahwa terjadi simpangan tetap sebesar $Y_m - Y_{el}$.



Gambar 14. *Contoh 3*

1.6 PENYELESAIAN ANALITIS STRUKTUR ELASTIS TANPA DAMPING DENGAN DERAJAT KEBEBASAN SATU

Persamaan gerak dari struktur elastis dengan derajat kebebasan satu telah diturunkan dalam pasal 1.3 sebagai:

$$F(t) - k\,y = M\,\ddot{y} \qquad (29)$$

atau:

$$M\,\ddot{y} + k\,y = F(t) \qquad (30)$$

Persamaan 30 merupakan persamaan diferensial tingkat dua. Penyelesaian umum persamaan 30 terdiri dari penyelesaian komplementer (*Complementary Solution*) dan penyelesaian partikulir (*Particular Solution*). Penyelesaian komplementer adalah penyelesaian persamaan homogen, yaitu penyelesaian di mana bagian

kanan dari tanda sama dengan adalah sama dengan nol. Secara fisik keadaan ini dapat diartikan sebagai suatu gerakan yang terjadi tanpa adanya gaya luar (getaran bebas, *Free Vibration*).

1.6.1 Getaran Bebas

Persamaan gerak dari getaran bebas dapat diperoleh dari persamaan 30 sebagai:

$$M\ddot{y} + k\,y = 0 \qquad (31)$$

Penyelesaian persamaan 31 ini dapat diperoleh sebagai [4, 5],

$$y = c_1 \sin\sqrt{(k/M)}\,t + c_2 \cos\sqrt{(k/M)}\,t \qquad (32)$$

dengan memakai tanda:

$$\omega = \sqrt{(k/M)} \qquad (33)$$

Persamaan 32 dapat ditulis sebagai:

$$y = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \qquad (34)$$

Dalam persamaan 32 dan 34 di atas, c_1, c_2 adalah konstanta integrasi yang dapat diperoleh dari keadaan awal yang telah diketahui. Bila keadaan awal pada waktu t = 0 dinyatakan sebagai kecepatan awal, $\dot{y}_o$, dan perpindahan tempat awal, y_0, konstanta integrasi c_1 dan c_2 dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

Pada waktu t = 0, perpindahan tempat awal, y_o dapat ditulis sebagai:

$$y_0 = c_1 \sin\omega(0) + c_2 \cos\omega(0)$$

Sehingga didapatkan:

$$c_2 = y_o \qquad (35)$$

Sedangkan kecepatan awal dapat diperoleh dengan terlebih dahulu menurunkan persamaan 34 terhadap waktu t untuk memperoleh persamaan kecepatan, yaitu:

$$\dot{y} = c_1\,\omega\cos\omega t - c_2\,\omega\sin\omega t \qquad (36)$$

sehingga konstanta integrasi c_1 dapat diperoleh, yaitu sebagai berikut:

Pada waktu t = 0, kecepatan awal, $\dot{y}_o$, dapat ditulis sebagai:

$$\dot{y} = c_1\,\omega\cos\omega(0) - c_2\,\omega\sin\omega(0)$$

$$c_1 = \dot{y}_o / \omega \qquad (37)$$

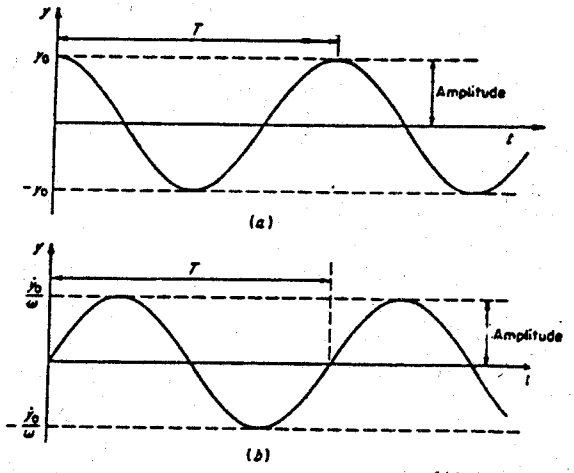
Dengan menggunakan persamaan 35 dan 37, penyelesaian getaran bebas (34) dapat ditulis sebagai:

$$y = \dot{y}_o/\omega \sin\omega t + y_o \cos\omega t \qquad (38)$$

Persamaan 38 merupakan penyelesaian komplementer dari penyelesaian umum persamaan gerak struktur elastis dengan derajat kebebasan satu (30).

1.6.1.1 Natural Period

Bentuk getaran bebas yang ditunjukkan dalam persamaan 38 merupakan gerakan yang berbentuk sinusoidal. Gerakan seperti ini dinamakan gerakan harmonis yang karakteristiknya ditentukan oleh besar amplitude dan natural period gerakan tersebut. Dalam hal getaran bebas dengan perpindahan tempat awal saja (Gambar 15a) maka besar amplitude y_o, sedangkan bila diberikan percepatan awal saja (Gambar 15b), maka besar amplitudenya adalah $\dot{y}_o/\omega$. Natural period T adalah waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan satu siklus gerakan harmonis secara lengkap.



Gambar 15. *Gerakan Harmonis*

Seperti terlihat dalam persamaan 38, besar amplitude tergantung kepada keadaan awal yang diberikan, tetapi natural period tergantung dari ω, seperti yang didefinisikan dalam persamaan 33, hanya tergantung pada karakteristik dari struktur yang ditinjau. Besaran ω tersebut di atas dinamakan *Natural Circular Frequency.*

$$\omega = \sqrt{(k/M)} \qquad [\text{rad/detik}] \tag{39}$$

Besar natural period dapat diperoleh sebagai:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(M/k)} \qquad [\text{detik}] \tag{40}$$

1.6.1.2 Natural Frequency

Natural Frequency f, didefinisikan sebagai kebalikan dari Natural Period,

$$f = 1/T = 1/2\pi\sqrt{(k/M)} \qquad [\text{cps, getaran per detik}] \tag{41}$$

Perhatikan dalam persamaan 39, 40 dan 41 bahwa Natural Circular Frequency ω, Natural Period T dan Natural Frequency, f, adalah karakteristik dari sistem yang tidak tergantung kepada keadaan awal maupun pembebanan.

1.6.2 Getaran Tak Bebas

Getaran tak bebas (*Forced Vibration*) adalah getaran yang terjadi karena adanya beban luar F(t) sehingga persamaan gerak yang terjadi dapat ditulis sebagai persamaan 30:

$$M\ddot{y} + k\,y = F(t) \tag{42}$$

Bila keadaan awal dari getaran tak bebas ini tidak nol, maka penyelesaian persamaan 42 adalah penyelesaian umum yang terdiri dari penyelesaian partikulir dan penyelesaian komplementer. Penyelesaian komplementer, seperti telah dijelaskan sebelumnya, adalah penyelesaian getaran bebas. Bila keadaan awal dari getaran tak bebas ini nol maka penyelesaian persamaan 42 hanya terdiri dari penyelesaian partikulir.

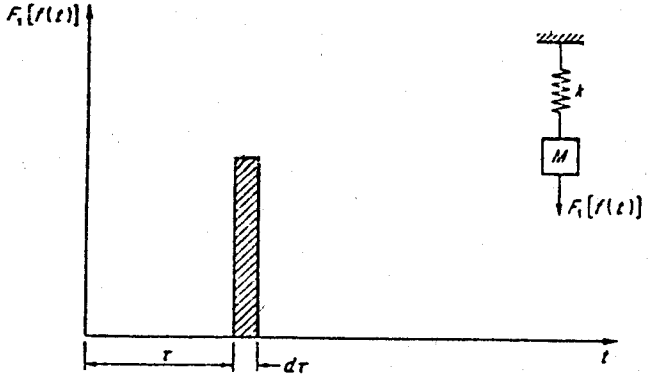
Penyelesaian partikulir untuk bentuk-bentuk tertentu dari F(t), misalnya polynomial atau fungsi harmonis, dapat dipelajari dari buku-buku matematika [4, 5]. Untuk dapat membahas cara

umum memperoleh penyelesaian partikulir, sebelumnya akan dibahas gerakan (respons) yang terjadi akibat pembebanan impuls.

1.6.2.1 Beban Impuls

Impuls adalah suatu gaya yang besar yang terjadi secara tiba-tiba dan berlangsung dalam waktu yang sangat pendek (Gambar 16). Beban impuls ini dapat didefinisikan sebagai:

$$\hat{F} = F\,d\tau \tag{43}$$



Gambar 16. *Beban Impuls*

Bila suatu sistem yang dalam keadaan diam dibebani dengan beban impuls, setelah beban impuls ini bekerja, maka gerakan yang terjadi adalah getaran bebas. Dengan demikian gerakan yang terjadi dapat diperoleh sebagai:

$$y = \dot{y}_0/\omega \sin\omega t + y_0 \cos\omega t \tag{44}$$

Karena beban impuls diberikan dari keadaan diam maka perpindahan tempat awal adalah $y_0 = 0$, sedangkan kecepatan awal $\dot{y}_0$ dapat dicari dari beban impuls, yaitu sebagai berikut:

$$\ddot{y}_0 = F/M, \text{ percepatan awal} \tag{45}$$

Karena beban impuls hanya bekerja selama dΓ maka kecepatan awal dapat diperoleh sebagai:

$$\dot{y}_o = \ddot{y}\, d\Gamma = F\, d\Gamma / M \tag{46}$$

yang dengan memperhatikan definisi impuls (43) juga dapat ditulis sebagai:

$$\dot{y}_o = \hat{F} / M \tag{47}$$

Dengan demikian gerakan yang terjadi dapat ditulis sebagai:

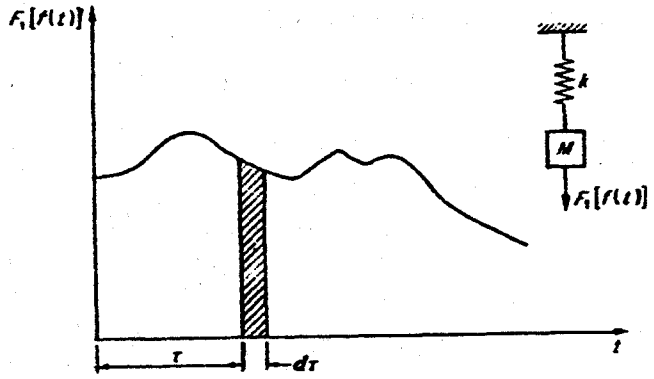
$$y = \hat{F} / M\,\omega \sin \omega t \tag{48}$$

Bila beban impuls baru diberikan pada waktu $t = \Gamma$ sedangkan persamaan gerak ditulis terhadap refrensi waktu t = 0, persamaan 48 menjadi:

$$y = \hat{F} / (M\,\omega) \sin \omega((t - \Gamma)) \tag{49}$$

1.6.2.2 Beban Sebarang

Beban sebarang (Gambar 17) dapat dibagi-bagi menjadi beberapa beban impuls sehingga penyelesaian getaran tak bebas dengan beban sebarang dapat diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian getaran akibat beban impuls (49).



Gambar 17. *Beban Sebarang*

Perhatikan sistem elastis dengan derajat kebebasan satu seperti terlihat dalam Gambar 17. Sistem tersebut dibebani dengan beban sebarang $F(t) = F_1\, f(t)$ (Gambar 17). Akibat satu pias yang merupakan bagian F(t), sebesar $\hat{F} = F_1\, f(\Gamma) d\Gamma$, gerakan yang terjadi dapat ditulis sebagai:

$$dy = \hat{F} / (M\,\omega) \sin(\omega(t - \Gamma)) \tag{50}$$

atau:

$$dy = F_1\, f(\Gamma) / (M\,\omega) \sin(\omega(t - \Gamma))\, d\Gamma \tag{51}$$

Respons terhadap beban sebarang secara keseluruhan dapat diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan 51:

$$y = \int F_1\, f(\Gamma) / (M\,\omega) \sin(\omega(t - \Gamma))\, d\Gamma \tag{52}$$

Bila didefinisikan perpindahan tempat statis (*statis deflection*), y_{st}, adalah:

$$y_{st} = F_1 / k = F_1 / (\omega^2\, M) \tag{53}$$

Persamaan gerakan (52) dapat diubah menjadi:

$$y = y_{st}\, \omega \int f(\Gamma) \sin(\omega(t - \Gamma))\, d\Gamma \tag{54}$$

Persamaan 54 di atas merupakan penyelesaian partikulir dari persamaan gerak 42, sedangkan penyelesaian umum persamaan gerak tersebut merupakan gabungan dari penyelesaian komplementer (36) dengan penyelesaian partikulir (54).

$$y = \dot{y}_o / \omega \sin \omega t + y_o \cos \omega t + y_{st}\, \omega \int f(\Gamma) \sin(\omega(t - \Gamma))\, d\Gamma \tag{55}$$

1.6.3 Faktor Beban Dinamis (Dynamic Load Factor, DLF)

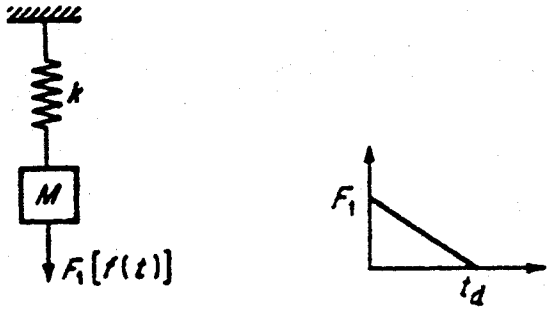
Biggs [1] mendefinisikan Faktor Beban Dinamis (*Dynamic Load Factor*, DLF) sebagai perbandingan antara perpindahan tempat dinamis pada suatu waktu terhadap perpindahan tempat statis akibat suatu beban referensi, F_1, yang dipakai untuk menyatakan besar suatu pembebanan dinamis $F(t) = F_1\, f(t)$. Jadi dynamic load factor dapat ditulis sebagai:

$$DLF = y / y_{st} = y / (F_1 / k) = k\, y / F_1 \tag{56}$$

Dari definisi di atas tampak bahwa DLF adalah suatu besaran yang tidak mempunyai dimensi dan menyatakan gerakan yang akan terjadi bila suatu sistem dibebani dengan suatu bentuk beban tertentu (tidak tergantung dari besar beban yang diberikan).

1.6.3.1 Contoh Perhitungan

Perhatikan sistem elastis dengan derajat kebebasan satu seperti terlihat dalam Gambar 18a yang dibebani dengan suatu beban segitiga seperti terlihat pada Gambar 18b dari keadaan awal diam.



(a) (b)

Gambar 18. *Beban Segitiga*

Beban segitiga tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(t) = F_1 f(t), \quad (57)$$

di mana: $f(t) = 1 - t/t_d$, untuk $0 < t < t_d$
$f(t) = 0$, untuk $t > t_d$

Respons sistem tersebut terhadap pembebanan yang diberikan dapat diperoleh dengan mempergunakan 55.

Untuk $0 < t < t_d$, di mana keadaan awal $y_0 = 0$ dan $\dot{y}_o$ persamaan 55 menghasilkan:

$$y = y_{st}\,\omega \int (1 - \Gamma/t_d)\sin(\omega(t-\Gamma))d\Gamma \quad (58)$$

Persamaan 58 dapat diselesaikan dengan menggunakan cara *Integration by Parts* [Taylor]:

$$y = y_{st}\,\omega \int -(1-\Gamma/t_d)/\omega \sin(\omega(t-\Gamma))d(t-\Gamma)d\{\omega(t-\Gamma)\}$$

$$y = y_{st}\,\omega \{(1-\Gamma/t_d)/\omega \cos(\omega(t-\Gamma)) - \int(-1/t_d)/\omega \cos(\omega(t-\Gamma))d\Gamma$$

$$y = y_{st}\{(1-\Gamma/t_d)\cos(\omega(t-\Gamma)) - 1/(t_d\,\omega)\sin(\omega(t-\Gamma))\}\ ]_0^t$$

Memperhatikan bahwa hasil integrasi di atas mempunyai batas integrasi $\Gamma = 0$ dan t, maka akan didapatkan bahwa:

$$y = y_{st}\{(1-\cos\omega t) + 1/t_d((\sin\omega t)/\omega - t)\} \quad (59)$$

atau:

$$DLF = 1 - \cos\omega t + (\sin\omega t)/\omega.t_d - t/t_d \quad (60)$$

Untuk $t \geq t_d$, gerakan yang terjadi adalah gerakan bebas. Keadaan awal untuk bagian gerakan ini dapat diperoleh dari persamaan 59, dengan memakai $t = t_d$ sebagai berikut:

$$y_0 = y_{st}\{(\sin\omega t_d)/(\omega t_d) - \cos\omega t_d\}$$

$$\dot{y} = y_{st}\{\omega \sin\omega t_d + (\cos\omega t_d)/t_d - 1/t_d\} \quad (61)$$

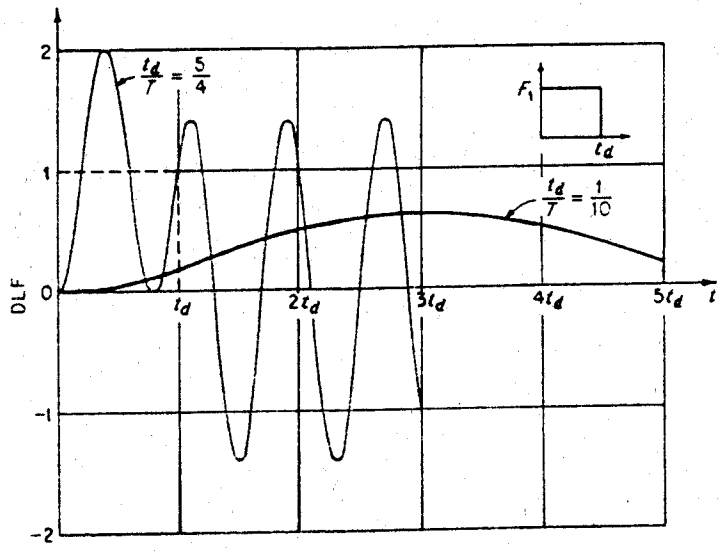
Oleh sebab itu dengan menggunakan persamaan 61, respons sistem setelah $t \geq t_d$ dapat diperoleh dari persamaan 44, yaitu sebagai:

$$y = y_{st}/(\omega t_d)\{\sin\omega t - \sin\omega(t-t_d)\} - y_{st}\cos\omega t \quad (62)$$

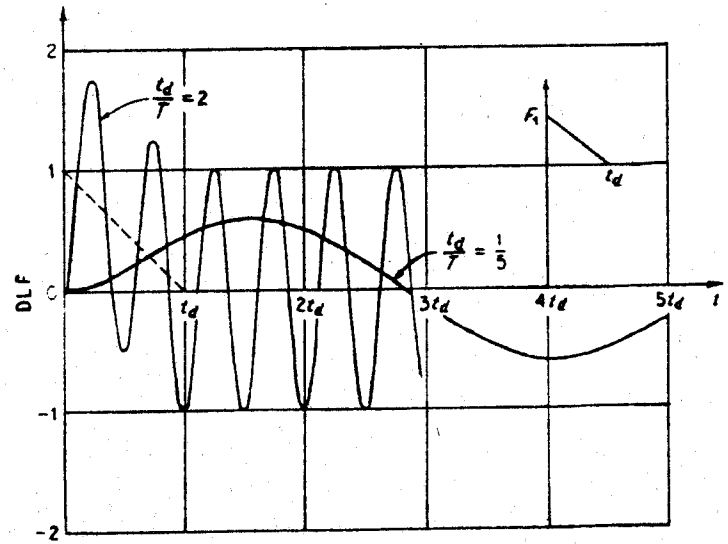
atau:

$$DLF = 1/(\omega t_d)\{\sin\omega t - \sin\omega(t-t_d)\} - \cos\omega t \quad (63)$$

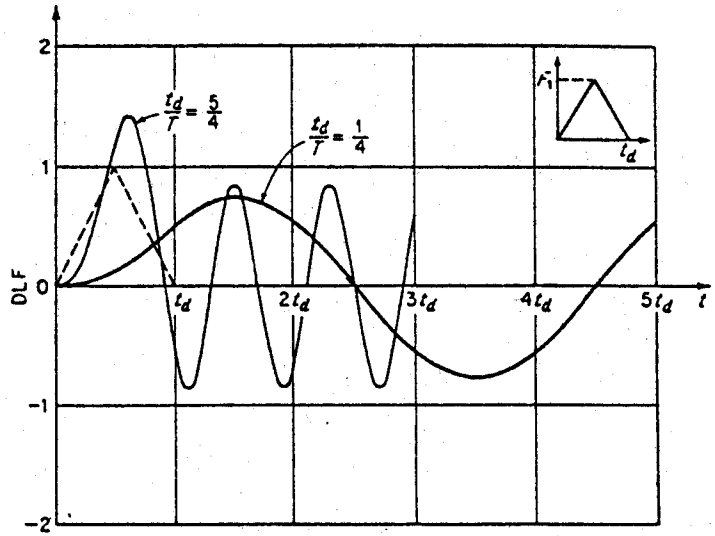
Gambar 19.a, 19.b dan 19.c menunjukkan respons dinamis suatu sistem elastis dengan derajat kebebasan satu terhadap pembebanan berbentuk segiempat dan segitiga. Terlihat dalam gambar tersebut bahwa besarnya dynamic load factor sangat tergantung kepada perbandingan antara lama pembebanan t_d (atau periode pembebanan) terhadap periode dari sistem T. Gambar 19.d menunjukkan pengaruh cara pemberian (penambahan) beban untuk mencapai suatu beban tetap. Terlihat dalam Gambar 19.d, respons sistem sangat tergantung kepada perbandingan lama pembebanan untuk mencapai suatu beban tetap tertentu, t_r, terhadap periode sistem T.



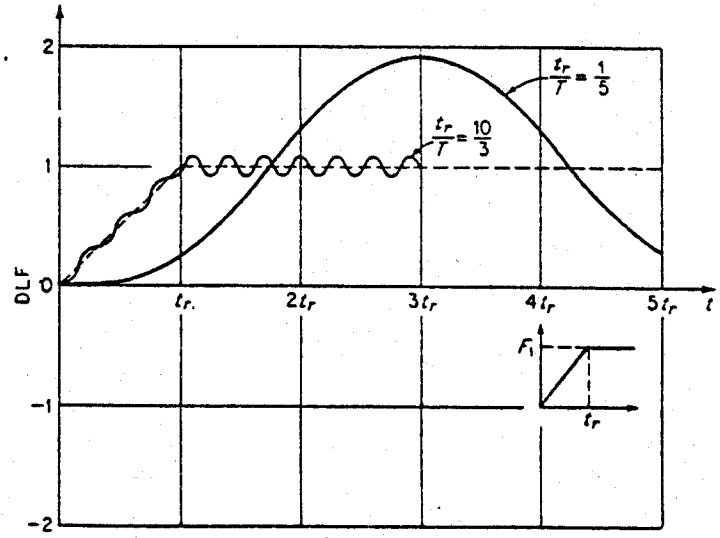
(a)



(b)

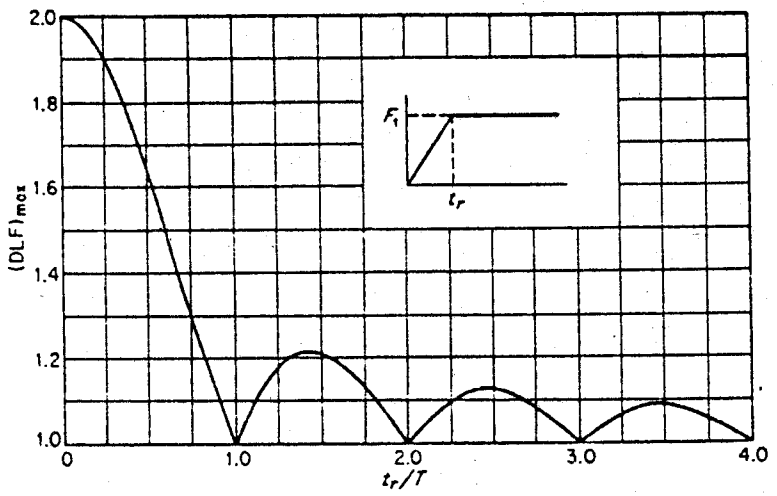


(c)

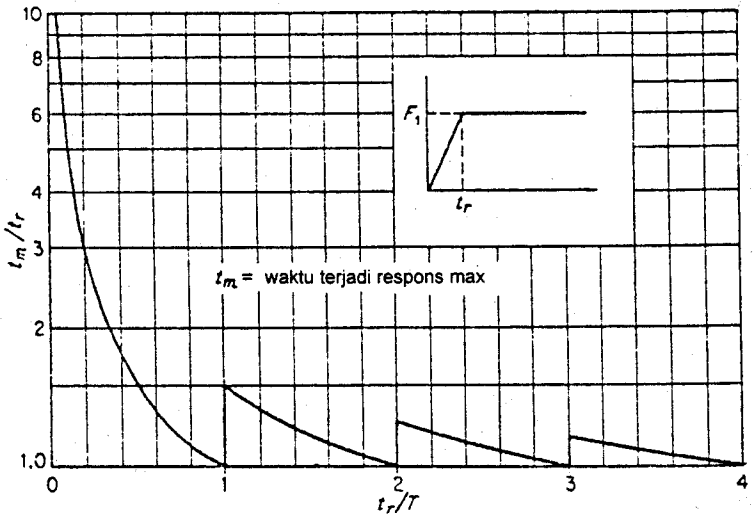


(d)

Gambar 19. *Respons dinamis SDOF terhadap beberapa macam gaya*



(c)



(d)

Gambar 21. *DLF untuk beban tetap dengan kenaikan beban dari nol*

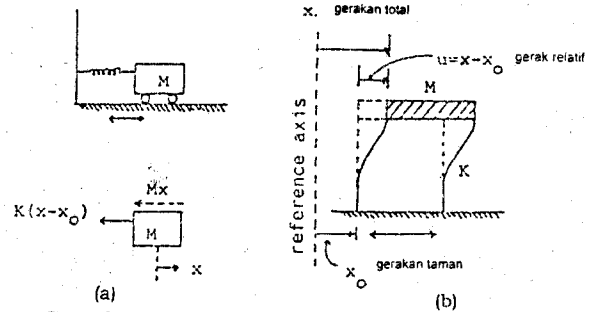
Gambar 20.a menunjukkan dynamic load factor maksimum untuk beban berbentuk segitiga dengan puncak pada t = 0 dan persegi terhadap perbandingan antara t_d dan T, sedangkan Gambar 20.b menunjukkan kapan dicapainya dynamic load factor maximum tersebut, t_m. Gambar 21 menunjukkan besar dinamic load factor maksimum untuk beban segitiga dengan puncak yang tercapai pada waktu t = ½ t_d, terhadap perbandingan dari waktu pem-berian beban td terhadap periode T dari sistem. Ditunjukkan pula waktu dicapainya DLF maksimum tersebut, t_m.

Gambar 21.c dan 21.d menunjukkan dinamic load factor maksimum untuk beban tetap yang dapat dicapai dengan menambah beban. Dalam Gambar 22.a tampak bahwa efek dinamis dapat dihilangkan bila penambahan beban diberikan sedemikian rupa sehingga waktu yang diperlukan untuk mencapai beban tetap, t_r, sama dengan periode sistem T.

Persamaan gerakan dari sistem elastis dengan derajat kebebasan satu yang telah dianalisis dalam bagian lain buku ini maupun gerakan yang ditunjukkan dalam Gambar 19 memperlihatkan bahwa setelah beban yang diberikan berhenti bekerja ternyata gerakan tidak berhenti dan tetap berlangsung tanpa ada pengurangan amplitude. Tentu saja dalam kenyataannya keadaan ini tidak terjadi karena dalam keadaan yang sebenarnya dapat diharapkan bahwa semua gerakan bebas pada suatu saat akan berhenti. Tahanan terhadap gerakan ini dinamakan *Damping* yang akan dibahas dalam bagian lain buku ini.

1.6.4 Gerakan pada Pondasi

Suatu struktur yang digerakkan pada pondasinya seperti terlihat dalam Gambar 22.a dapat diidealisasikan dalam susunan massa dan per seperti diperlihatkan dalam Gambar 22.b.



Gambar 22. *Gerakan pada pondasi*

Bila gerakan pada pondasi dinyatakan sebagai y_0 dan gerakan pada massa M dinyatakan sebagai y_1 maka dengan menggunakan prinsip dinamic equilibrium dari D'Alembert, persamaan gerak sistem tersebut dapat diturunkan sebagai berikut:

$$M\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_0) = 0 \qquad (64)$$

Perhatikan bahwa untuk gaya inertia harus dipergunakan percepatan absolut pada massa yang ditinjau, $\ddot{y}_1$, sedangkan untuk gaya perlawanan dari per menggunakan selisih antara gerakan pada massa, y_1, dengan gerakan pada pondasi, y_0. Bila gerakan relative dari massa terhadap gerakan pondasi, $(y_1 - y_0)$, dinyatakan sebagai y, maka:

$$y = y_1 - y_0$$

$$\ddot{y} = \ddot{y} - \ddot{y}_0, \text{ dan}$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y} + \ddot{y}_0 \qquad (65)$$

Dengan demikian persamaan gerak 64 berubah menjadi:

$$M(\ddot{y} + \ddot{y}_0) + k\,y = 0, \text{ atau}$$

$$M\ddot{y} + k\,y = -M\ddot{y}_0 \qquad (66)$$

Perhatikan bahwa persamaan gerak ini (66) sama dengan persamaan gerak getaran tak bebas (42), dengan gaya pada massa M, F(t), sebesar $(-M\ddot{y}_0)$.

1.7 PENYELESAIAN ANALITIS STRUKTUR ELASTIS DENGAN DAMPING DENGAN DERAJAT KEBEBASAN SATU

Damping adalah suatu besaran yang menyatakan tahanan terhadap gerakan pada suatu sistem dinamis dan merupakan salah satu sifat fisik dari sistem tersebut. Bila besar sifat fisik yang lain, massa dan kekakuan, relatif dapat dengan mudah dicari, damping yang merupakan mekanisme penyerapan energi sangat sulit dimengerti dan didapatkan. Besarnya damping ini biasanya dinyatakan dalam presentasi dari suatu besaran yang dinamakan *Critical Damping*, yaitu besar damping yang akan menyebabkan hilangnya getaran. Hal ini akan dibahas lebih lanjut dalam bagian lain buku ini. Besarnya damping ini tergantung dari berbagai macam hal.

Macam damping yang diketahui ialah:

1. *Frictional (Coulomb) Damping*
   Frictional damping terjadi karena adanya gesekan dari permukaan dua buah benda yang bergerak.
2. *Viscous Damping*
   Viscous damping terjadi karena adanya gerakan dalam udara atau cairan.
3. *Internal Friction*
   Damping ini terjadi karena adanya geseran antara molekul-molekul dari bahan.

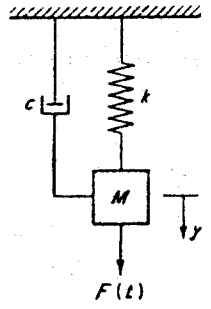
Secara matematik damping dapat dinyatakan dengan rumus:

$$D = c(\dot{x})^n \qquad (64)$$

Besar pangkat n ditentukan untuk bermacam-macam damping sebagai:

Frictional Damping, $n = 0$; $D = c$
Viscous Damping, $n = 1$; $D = c\dot{x}$
Internal Friction, $n = 2$; $D = c(\dot{x})$ (65)

Perhitungan sistem dinamis suatu struktur biasanya hanya memakai viscous damping, persamaan 65 b. Dalam idealisasi, struktur viscous damping ini biasanya digambarkan sebagai *dash pot* seperti terlihat dalam Gambar 23.



Gambar 23. *Struktur dengan damping*

Dengan memperhatikan damping, persamaan gerak sistem elastis dengan derajat kebeban satu dapat diperoleh dengan menggunakan cara dynamic equilibrium D'Alembert, yaitu:

$$M\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F(t) \tag{66}$$

Penyelesaian persamaan ini dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan homogen (getaran bebas) yang merupakan penyelesaian komplementer serta mencari penyelesaian partikulir yang memenuhi persamaan di atas.

1.7.1 Getaran Bebas dengan Damping

Persamaan gerak dari getaran beban dengan damping dapat diperoleh dari persamaan 66 dengan mengganti F(t) dengan nol sehingga menjadi:

$$M\ddot{y}+c\,\dot{y}+ky=0 \tag{67}$$

atau:

$$\ddot{y}+\frac{c}{M}\dot{y}+\frac{k}{M}y=0 \tag{68}$$

yang dapat diubah lebih lanjut menjadi:

$$\ddot{y}+2\beta\omega_n\,\dot{y}+\omega_n{}^2\,y=0 \tag{69}$$

di mana:

$$\beta=+\frac{c}{\sqrt{(4Mk)}}\quad \text{dan,}$$

$$\omega_n=+\sqrt{(k/M)} \tag{70}$$

Persamaan karakteristik dari persamaan 69 adalah:

$$\lambda^2+2\beta\omega_n\lambda+\omega_n{}^2=0 \tag{71}$$

Persamaan 71 merupakan persamaan kuadrat dalam yang mempunyai akar-akar:

$$\lambda_{1,2}=-\beta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{(\beta^2-1)} \tag{72}$$

Penyelesaian persamaan 69 tergantung dari sifat akar-akar persamaan karakteristik, persamaan 72, sedangkan sifat akar-akar persamaan karakteristik tergantung kepada besar bilangan β sebagai berikut.

1.7.1.1 Dua akar nyata, β > 1.

Bila β > 1 maka persamaan 72 akan menghasilkan dua buah akar, λ^1 dan λ^2. Dari persamaan 72 dengan mudah dapat dilihat bahwa kedua akar persamaan tersebut merupakan akar yang negatif dan nyata sehingga penyelesaian persamaan 69 dapat ditulis sebagai:

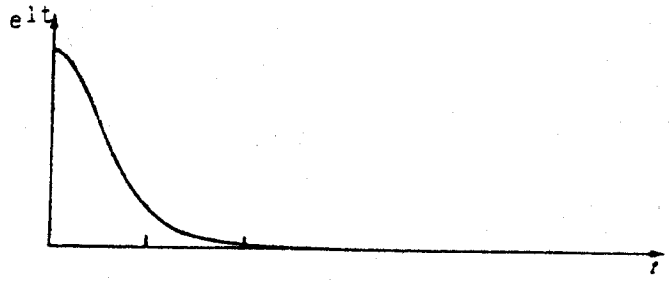
$$y = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} \tag{73}$$

di mana:

$$\lambda_1=-\beta\omega_n+\omega_n\sqrt{(\beta^2-1)}$$

$$\lambda_2=-\beta\omega_n-\omega_n\sqrt{(\beta^2-1)} \tag{74}$$

Dengan memperhatikan grafik dari fungsi $e^{\lambda t}$ yang diperlihatkan dalam Gambar 24 dapat diambil kesimpulan dari persamaan 73 bahwa bila besaran β > 1 maka tidak akan terjadi getaran dari sistem dinamis yang ditinjau. Keadaan ini, β > 1, dinamakan *Over Damping*.



Gambar 24. *Grafik $e^{\lambda t}$*

1.7.1.2 Dua akar imajiner, β < 1.

Dalam hal besaran β < 1, besaran di bawah tanda √ dalam persamaan 72 adalah bilangan negatif sehingga persamaan 72 akan memberikan dua buah akar imajiner (bilangan kompleks) sebagai berikut:

$$l_1 = \beta\omega_n + i\omega_n\sqrt{(1-\beta^2)} \text{ dan}$$

$$l_2 = \beta\omega_n + i\omega_n\sqrt{(1-\beta^2)} \quad (75)$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan 69 menjadi:

$$y = e^{(-\beta\omega_n t)}\left(A_1 e^{(iBt)} + A_2 e^{(-iBt)}\right) \quad (76)$$

di mana:

$$B = \omega_n\sqrt{(1-\beta^2)} \quad (77)$$

Persamaan 76 dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$y = e^{(-\beta\omega_n t)}\left(A_3\cos(Bt) + A_4\sin(Bt)\right) \quad (78)$$

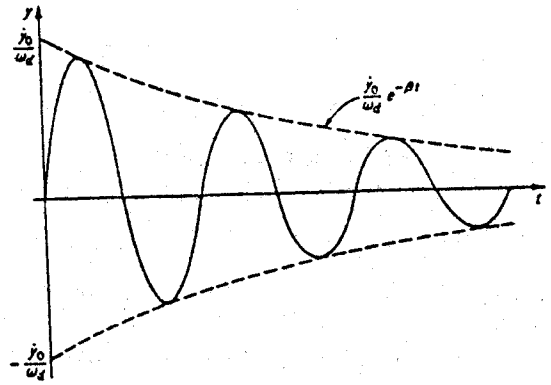
yang kemudian dapat disederhanakan menjadi:

$$y = A^{(-\beta\omega_n t)}\sin\left(\omega_n\sqrt{(1-\beta^2)}t + \phi\right) \quad (79)$$

Persamaan gerak yang dinyatakan dalam persamaan 79 digambarkan dalam Gambar 25. Terlihat bahwa persamaan 79 dapat digambarkan sebagai suatu fungsi sinusoidal dengan perubahan fase sebesar ϕ, dengan fungsi:

$$y = A e^{(-\beta\omega_n t)} \quad (80)$$

sebagai envelope.



Gambar 25. *Keadaan under damping*

Jelas terlihat dari gambar 25, bahwa keadaan $\beta < 1$ pada sistim dinamis yang ditinjau akan mengakibatkan terjadinya getaran. Keadaan ini, $\beta < 1$, dinamakan *Under Damping*.

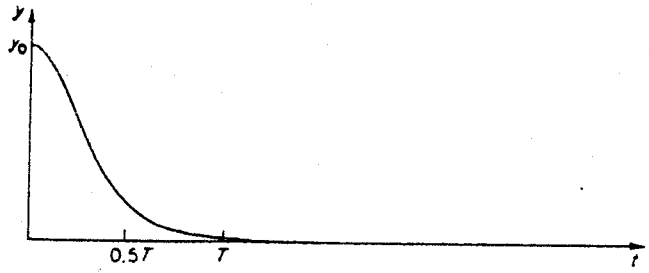
1.7.1.3 Satu akar nyata, $\beta = 1$.

Dalam hal $\beta = 1$ maka persamaan 72 akan menghasilkan dua buah akar yang sama, $l_1 = l_2 = l$, dan merupakan bilangan nyata yang negatif. Dalam keadaan ini penyelesaian persamaan 69 dapat ditulis sebagai:

$$y = A_1 e^{-lt} + A_2 t e^{-lt} \quad (81)$$

di mana:

$$l = \beta\omega_n \quad (82)$$



Gambar 26. *Critical damping*

Pada Gambar 26 jelas bahwa persamaan 81 juga menunjukkan tidak adanya getaran. Keadaan yang terakhir ini, $\beta = 1$, merupakan pembatas antara keadaan *under damped* dan *over damped* dan dinamakan sebagai *Critical Damping*.

1.7.1.4 Karakteristik Struktur dengan Damping

Karakteristik dari sistem dinamis dengan damping dapat diperoleh dari persamaan 79. Besar circular frequency, ω, dapat diperoleh sebagai:

$$\omega = \omega_n \sqrt{(1-\beta^2)} \text{ [rad/det]} \quad (83)$$

Frekuensi, f:

$$f = \frac{\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}}{2\pi} \text{ [rpm, cps]} \quad (84)$$

Periode, T:

$$T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ [det]} \quad (85)$$

Dalam persamaan-persamaan di atas, ω_n adalah natural circular frequency dari sistem tanpa damping.

Suatu karakteristik penting lain dari sistem dinamis dengan damping adalah critical damping yang dapat diturunkan sebagai berikut. Keadaan critical damping dicapai bila besaran β, persamaan 70.a, adalah 1.

$$\beta = c/\sqrt{(4\,k\,M)} \quad (86)$$

Untuk $\beta > 1$, $c = c_{cr}$, jadi besar critical damping adalah:

$$c_{cr} = \sqrt{(4\,k\,M)} \quad (87)$$

Besar damping dari suatu sistem dinamis biasanya dinyatakan dalam bagian, biasanya persentase, dari critical damping. Dengan memperhatikan persamaan 87, persamaan 86 dapat ditulis sebagai:

$$c = \beta\, c_{cr} \quad (88)$$

Dari persamaan 88 terlihat bahwa besaran β menunjukkan bagian dari critical damping. Besaran ini β (dalam persen) biasanya digunakan untuk menyatakan besar damping dari suatu sistem dinamis. Pemakaian persen dari critical damping (β), untuk menyatakan besar damping dilandasi oleh alasan-alasan praktis untuk memudahkan perhitungan. Tentang hal ini akan dibahas pada bagian lain buku ini.

1.7.2 Getaran Tak Bebas dengan Damping

Dalam pembahasan dalam Subbab 1.7.1 terlihat bahwa hanya sistem dinamis yang underdamped yang memberikan respons berupa getaran. Oleh sebab itu pada bagian selanjutnya hanya kasus ini yang akan dibahas.

Seperti pada penyelesaian getaran tak bebas tanpa damping, penyelesaian gerakan tak bebas dengan damping dapat dilakukan dengan menggunakan penyelesaian dari beban unit impuls (lihat persamaan 49), yaitu dengan menggunakan *convolution integral.*

Dengan cara yang sama, penyelesaian terhadap unit impuls pada getaran tak bebas dengan damping dapat diperoleh, yaitu:

$$y = \frac{F}{M\,\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}\, t\right) \quad (89)$$

Jadi penyelesaian partikulir dari getaran tak bebas dengan damping dapat diperoleh sebagai:

$$y = \int_0^t \frac{F_1\, f(\Gamma)}{M\,\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta\omega_n (t-\Gamma)} \sin\left(\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right) d\Gamma \quad (90)$$

atau:

$$y = y_{st}\,\omega_n \int_0^t \frac{f(\Gamma)}{\sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta\omega_n (t-\Gamma)} \sin\left(\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right) d\Gamma \quad (91)$$

Dengan demikian penyelesaian umum untuk getaran tak bebas dengan damping (yang underdamped) adalah:

$$y = y_c + y_p \quad (92)$$

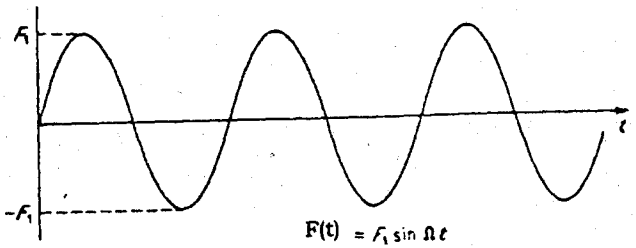
di mana y_c adalah penyelesaian komplemen (*complementary solution*), persamaan 79, sedangkan y_p adalah penyelesaian partikulir (*particular solution*), persamaan 90.

1.7.3. Getaran Tak Bebas dengan Beban Harmonis

Beban harmonis adalah beban-beban yang besarnya berubah-ubah dalam suatu fungsi yang berbentuk sinusoidal, misalnya:

$$F(t) = F_1 \sin(\Omega\, t) \quad (93)$$

MILIK
Badan Perpustakaan
Propinsi Jawa Timur



Gambar 27. *Beban harmonis*

Persamaan gerak sistem dinamis dengan beban harmonis seperti yang tampak pada Gambar 27 diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

$$M\ddot{y}+c\dot{y}+k\,y=F(t) \tag{94}$$

atau:

$$\ddot{y}+2\beta\omega_n\,\dot{y}+{\omega_n}^2\,y=\frac{F(t)}{M} \tag{95}$$

Dalam persamaan di atas, ω_n adalah natural circular frequency (dari sistem dinamis tanpa damping) sedangkan β adalah koefisien damping.

Bila y_p,

$$y_p=A\sin(\Omega t-\alpha) \tag{96}$$

adalah penyelesaian partikulir dari persamaan 94 maka y_p harus memenuhi persamaan gerak, persamaan 94. Dengan mempergunakan persamaan 95, persamaan 94 berubah menjadi sebagai berikut:

$$-\Omega^2 A\sin(\Omega t-\alpha)+2\beta\omega_n\Omega A\cos(\Omega t-\alpha)+{\omega_n}^2 A\sin(\Omega t-\alpha)=$$

$$(F_1/M)\sin\Omega t \tag{97}$$

Persamaan 96 dapat diuraikan lebih lanjut menjadi:

$$A\left(-\Omega^2\cos\alpha+2\beta\omega_n\Omega\sin\alpha+{\omega_n}^2\cos\alpha\right)\sin(\Omega+)+$$

$$A\left({\omega_n}^2\sin\Omega+2\beta\omega_n\Omega\cos\Omega+\Omega^2\sin\Omega\right)\cos\Omega t=$$

$$(F_1/M)\sin\Omega t \tag{98}$$

Karena persamaan 97 harus dipenuhi untuk semua harga T, maka koefisien sin (Ωt) pada bagian kiri tanda sama dengan harus sama dengan koefisien sin (Ωt) pada bagian kanan, sedangkan koefisien cos (Ωt) bagian kiri tanda sama dengan harus sama dengan nol sehingga:

$$A\left(-\Omega^2\cos\alpha+2\beta\omega_n\Omega\sin\alpha+{\omega_n}^2\cos\alpha\right)\sin\Omega t=F_1/M,\ \text{dan}$$

$$A\left({\omega_n}^2\sin\Omega+2\beta\omega_n\Omega\cos\Omega+\Omega^2\sin\Omega\right)=0 \tag{99}$$

Kedua persamaan 98 tersebut dapat diselesaikan lebih lanjut sehingga didapatkan:

$$A\cos\alpha=(1/D)\left({\omega_n}^2-\Omega^2\right)F_1/M$$

$$A\sin\alpha=(1/D)2\beta\omega_n\Omega F_1/M \tag{100}$$

di mana:

$$D=\left({\omega_n}^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2{\omega_n}^2\Omega^2 \tag{101}$$

Penyelesaian partikulir (95) dapat diperoleh setelah besaran A dan α didapatkan dari persamaan 100 dan 101.

Dalam hal simpangan maupun kecepatan awal sistem dinamis adalah nol, penyelesaian umum persamaan gerak adalah sama dengan penyelesaian partikulir sehingga penyelesaian persamaan getaran tak bebas dengan beban harmonis (93) dapat ditulis sebagai:

$$y=A\sin(\Omega t-\alpha) \tag{102}$$

di mana besaran A dan α adalah:

$$\alpha=\arctan\left(\frac{2\beta\Omega/\omega_n}{1-(\Omega/\omega_n)^2}\right)$$

$$A=\frac{F_1}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(\left(1-(\Omega/\omega_n)^2\right)^2+4\beta^2(\Omega/\omega_n)^2\right)}} \tag{103}$$

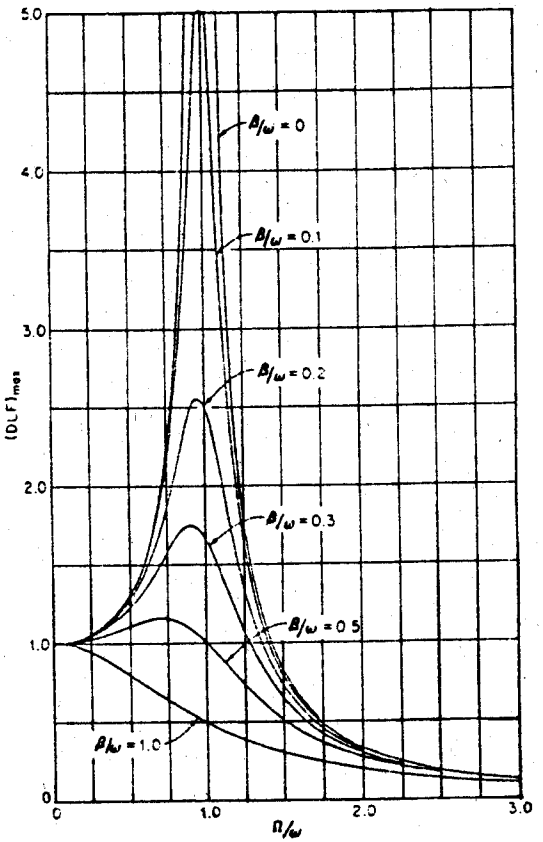
Dari persamaan 102 diperoleh *dynamic load factor maximum*, DLF_{max} sebagai:

$$DLF_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(\left(1-(\Omega/\omega_n)^2\right)^2 + 4\beta^2(\Omega/\omega_n)^2\right)}} \quad (104)$$

Besar DLF_{max} ini untuk bermacam-macam koefisien damping, β, ditunjukkan dalam grafik yang terdapat dalam Gambar 28.

Perhatikan, bahwa untuk sistem dinamis yang tidak mempunyai damping, β = 0, persamaan 104 menjadi:

$$DLF_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(\left(1-(\Omega/\omega_n)^2\right)^2\right)}} \quad (105)$$



Gambar 28. *DLFmax untuk gerakan tak bebas dengan beban harmonis*

Persamaan 104 menunjukkan bahwa bila sistem dinamis yang ditinjau tidak mempunyai damping, β = 0, dan pembebanan yang diberikan adalah beban harmonis yang mempunyai periode (atau circular frequency) yang sama dengan periode sistem tersebut, $\Omega = \omega_n$, maka akan terjadi respons $y = \infty$ $(DLF_{max} = \infty)$. Keadaan ini dinamakan keadaan resonansi yang tak terbatas (*unbounded resonance*). Lihat Gambar 28.

Gambar 28 juga menunjukkan bahwa pada pembebanan harmonis akan selalu terjadi respons yang besar (resonansi) bila circular frequency beban, Ω, mendekati circular frequency, w_n, sistem yang ditinjau.

Meskipun persamaan 104 menyatakan secara matematis terjadinya unbounded resonance bila frekuensi beban, Ω, sama dengan circular frequency sistem, ω_n, pemahaman lebih lanjut menunjukkan bahwa unbounded resonance ini hanya terjadi pada waktu t = ∞. Perhatikan penurunan berikut ini.

Untuk keadaan tanpa damping dengan simpangan dan kecepatan awal nol maka respons sistem terhadap beban harmonis (persamaan 102) menjadi:

$$y = A \sin(\Omega t - \alpha) \quad (106)$$

di mana besaran A dan α menjadi:

$$\alpha = 0$$

$$A = \frac{F_1}{M\omega_n^2} \frac{1}{\left(1-(\Omega/\omega_n)^2\right)} \quad (107)$$

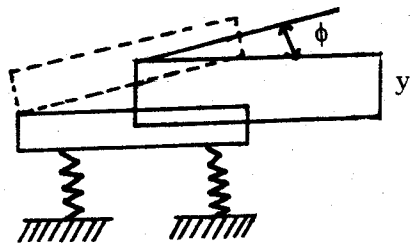
Persamaan 105 menunjukkan bahwa untuk $\Omega = \omega_n$, y tidak tertentu (y = 0/0). Harga y dapat diperoleh dengan menggunakan rumus L'Hospital. Penurunan pembilang dan penyebut persamaan 105 terhadap α menghasilkan:

$$y = \frac{F_1}{2M\Omega}\left(t\cos(\Omega t) - \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) \quad (108)$$

Persamaan 107 menunjukkan untuk $\Omega = \omega_n$, akan diperoleh y tertentu. Y = ∞ hanya terjadi pada waktu t = ∞.

1.8 Penyelesaian Analitis Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak

Bagian ini membahas respons dinamis dari sistem dengan derajat kebebasan banyak (*multidegree of freedom system*). Jumlah derajat kebebasan (*degree of freedom*) adalah jumlah koordinat independen yang perlu dan cukup untuk menyatakan konfigurasi suatu sistem secara lengkap. Sebagai contoh, struktur dalam Gambar 29 merupakan struktur dengan derajat kebebasan dua karena diperlukan dua buah koordinat, y dan θ, untuk menyatakan konfigurasinya secara lengkap. Untuk menyederhanakan pembahasan maka akan dibahas terlebih dahulu respons dinamis untuk sistem dengan derajat kebebasan dua.



Gambar 29. *Struktur dengan kebebasan dua.*

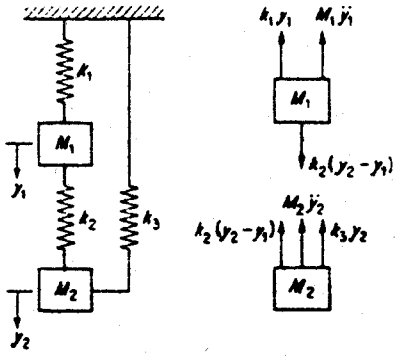
1.8.1 Getaran Bebas Struktur dengan Derajat Kebebasan Dua

Perhatikan suatu struktur dengan derajat kebebasan dua seperti terlihat dalam Gambar 30. Persamaan gerak sistem tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan prinsip dinamic equilibrium dari D'Alembert.

Penggunaan prinsip D'Alembert pada massa 1 dan massa 2 menghasilkan persamaan gerak sebagai berikut:

$$M_1 \ddot{y} + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) = 0 \text{ dan,}$$

$$M_2 \ddot{y} + k_3 y_2 + k_2 (y_2 - y_1) = 0 \qquad (109)$$



Gambar 30. *Sistem dinamis dengan derajat kebebasan dua*

Persamaan tersebut (103) dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (110)$$

Dalam persamaan di atas matriks massa **M**, matriks kekakuan **K** dan vektor simpangan **y** adalah:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T = (y_1 \; y_2) \qquad (111)$$

Penyelesaian persamaan gerak di atas dapat diperoleh sebagai:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega(t + \alpha))$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega(t + \alpha)) \qquad (112)$$

sedangkan percepatan massa 1 dan 2 dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan 112 dua kali terhadap t sehingga didapatkan:

$$\ddot{y}_1 = -A_1 \omega^2 \sin(\omega(t + \alpha))$$

$$\ddot{y} = -A_2 \omega^2 \sin(\omega(t + \alpha)) \qquad (113)$$

Untuk memperoleh besar A dan α, persamaan 112 dan 113 harus memenuhi persamaan gerak 109 atau 110 sehingga diperoleh:

$$\left(-M_1\omega^2+k_1+k_2\right)A_1+\left(-k_2\right)A_2=0$$

$$\left(-k_2\right)A_1+\left(-M_2\omega^2+k_2+k_3\right)A_2=0 \qquad (114)$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix}\left(-M_1\omega^2+k_1+k_2\right) & -k_2\\ -k_2 & \left(-M_2\omega^2+k_2+k_3\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad (115)$$

Karena amplitude A tidak mungkin nol (A = 0 berarti tidak ada gerakan), maka persamaan 115 hanya dapat dipenuhi bila harga determinan.

$$\begin{vmatrix}\left(-M_1\omega^2+k_1+k_2\right) & -k_2\\ -k_2 & \left(-M_2\omega^2+k_2+k_3\right)\end{vmatrix} \qquad (116)$$

yang setelah dievaluasi akan menghasilkan:

$$\left(\omega^2\right)^2-\left(\frac{\left(k_1+k_2\right)}{M_1}+\frac{\left(k_2+k_3\right)}{M_2}\omega^2+\frac{k_2\left(k_1+k_3\right)+k_1k_3}{M_1M_2}\right)=0 \qquad (117)$$

Persamaan 117 merupakan persamaan kuadrat dalam ω^2 Dengan demikian terlihat bahwa suatu sistem dinamis dengan derajat kebebasan dua akan mempunyai dua buah circular frequency yang nyata.

Untuk menjelaskan lebih lanjut, anggaplah kekakuan per k_1, k_2 dan k_3 semuanya sama, yaitu sebesar k. Begitu pula dengan massa M_1 dan M_2 yang sama dengan M. Dengan demikian persamaan 117 berubah menjadi:

$$\left(\omega^2\right)^2-\left(\frac{4k}{M}\right)\omega^2+\frac{3k^2}{M^2}=0 \qquad (118)$$

Persamaan 118 akan menghasilkan dua buah akar, yaitu:

$$\omega_1{}^2=k/M \text{ dan}$$

$$\omega_2{}^2=3k/M \qquad (119)$$

atau:

$$\omega_1=\sqrt{\left(k/M\right)} \text{ dan}$$

$$\omega_2=1.73\sqrt{\left(k/M\right)} \qquad (120)$$

Kedua circular frequency ini merupakan natural circular frequency dari kedua normal modes yang ada. Circular frequency yang lebih kecil, ω_1, merupakan frekuensi dari mode yang pertama (*fundamental* atau *first mode*), sedangkan ω_2 adalah frekuensi dari mode yang kedua (*second mode*).

Penggunaan ω_1 dan ω_2 ke dalam persamaan 115 tidak akan dapat menghasilkan besaran A_1 dan A_2 tetapi hanya akan menghasilkan perbandingan antara A_1 dan A_2. Hal ini terjadi karena ω_1 dan ω_2 didapat dengan menyamakan determinan koefisien persamaan 115 dengan nol. Harga relatif A_1 dan A_2 tersebut dinamakan bentuk karakteristik (*characteristic shape* atau *characteristic vector*) dari sistem dinamis tersebut.

Untuk kasus ini, dengan menggunakan ω_1 (120), persamaan pertama dari persamaan 115 menghasilkan:

$$\left(-k+2k\right)A_{11}+\left(-k\right)A_{21}=0 \qquad (121)$$

sehingga diperoleh:

$$A_{11}=A_{21} \qquad (122)$$

yang merupakan bentuk karakteristik dari mode pertama. Dalam persamaan di atas subscript kedua dari A_1 dan A_2 menyatakan nomor mode atau nomor frekuensi. Tentu saja hasil yang sama akan didapat bila ω_1 dimasukkan ke dalam persamaan kedua dari persamaan 115. Penggunaan ω_2 (120) ke dalam persamaan 115 menghasilkan:

$$\left(-3k+2k\right)A_{12}+\left(-k\right)A_{22}=0 \qquad (123)$$

sehingga didapat:

$$A_{12}=-A_{22} \qquad (124)$$

yang merupakan bentuk karakteristik dari mode kedua.

Dalam mode yang pertama, kedua massa bergerak dalam arah dan besar yang sama, sedangkan dalam mode kedua, kedua

massa tersebut bergerak dengan besar yang sama tetapi dalam arah yang berlawanan. Dalam suatu mode tertentu kedua massa tersebut bergerak dalam fase yang sama sehingga simpangan maksimum pada kedua massa terjadi pada waktu yang sama. Keadaan ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan program komputer gempa ii [8], yaitu dengan memberikan beban harmonis yang mempunyai periode yang sama dengan periode yang bersangkutan.

1.8.2 Getaran Bebas Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak

Persamaan gerak struktur dengan derajat kebebasan banyak dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai (110):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (125)$$

di mana **M** adalah matriks massa, **K**, matriks kekakuan dan **y** vektor simpangan. Dalam kasus-kasus yang sederhana, matriks massa **M** biasanya merupakan matriks diagonal sedangkan vektor simpangan **y** merupakan vektor yang elemen-elemennya adalah variabel yang sesuai dengan derajat kebebasan sistem yang ditinjau (Lihat pembahasan untuk sistem dinamis dengan derajat kebebasan dua). Matriks kekakuan selalu merupakan matriks yang simetris dan dapat dicari dengan mudah dengan memperhatikan sifat-sifat sistem yang ditinjau (Lihat pembahasan sub bagian 1.4).

Penyelesaian persamaan gerak 125 dapat diperoleh sebagai:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \sin(\omega t) \qquad (126)$$

Dalam persamaan 126, **y** merupakan vektor simpangan sedangkan **A** adalah vektor amplitude yang berpasangan untuk vektor simpangan tersebut. Dari persamaan 120, vektor percepatan $\ddot{\mathbf{y}}$ dapat diperoleh sebagai:

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\omega^2 \mathbf{A} \sin(\omega t) \qquad (127)$$

Penggunaan persamaan 126 dan 127 dalam persamaan 125 menghasilkan persamaan karakteristik (*characteristic equation*) sebagai berikut:

$$\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (128)$$

atau:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{A} = 0 \qquad (129)$$

Karena **A** adalah vektor amplitude maka A tidak mungkin nol sehingga dengan demikian persamaan 129 hanya dapat dipenuhi bila determinan matriks koefisien dari vektor A sama dengan nol.

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \qquad (130)$$

Bila sistem dinamis yang ditinjau mempunyai n buah derajat kebebasan maka persamaan di atas adalah persamaan frekuensi yang merupakan persamaan pangkat n dalam (ω^2). Dari persamaan tersebut akan diperoleh n frekuensi ω yang nyata yang masing-masing merupakan natural curcular frequency dari n buah mode yang ada.

Dari persamaan 129, untuk setiap harga ω yang diperoleh dari persamaan 130 diperoleh n buah vektor amplitude yang merupakan bentuk karakteristik *(characteristic shape, characteristic vector, mode shape*) dari mode yang bersangkutan. Seperti telah dijelaskan dalam pembahasan sistem dinamis dengan derajat kebebasan dua, bila sistem dinamis tersebut bergetar dalam salah satu mode maka bentuk simpangan yang terjadi selalu mengambil bentuk mode yang bersangkutan.

Dalam istilah matematik, persamaan karakteristik (129) dikenal dengan nama persamaan Eigen, ((ω^2), dikenal sebagai *characteristic values* atau *Eigenvalues* sedangkan characteristic shape, A, dikenal sebagai *Eigenvector*. Problema yang menghasilkan bentuk persamaan Eigen dinamakan *Eigenvalue problem* atau *characteristic value problem*.

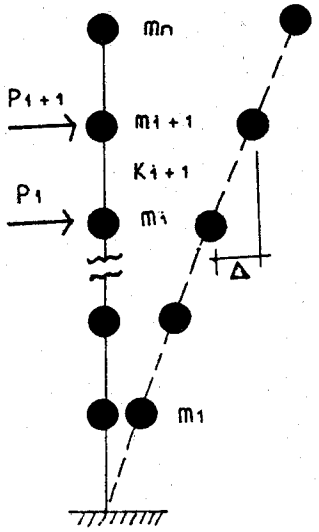
1.8.3 Natural Frequency dan Mode Shape

Ada bermacam-macam cara untuk mencari natural frequency dan mode shape, yang di antara cara-cara manual terdapat cara Stodola-Vianello, cara Rayleigh-Ritz [1, 2, 3] dan cara Holzer. Dalam pembahasan berikut akan dibicarakan cara Hölzer.

1.8.3.1 Cara Holzer

Perhatikan suatu struktur dengan derajat kebebasan n seperti terlihat dalam Gambar 31. Untuk menyederhanakan pemba-

hasan, struktur tersebut dianggap tidak mempunyai damping. Seperti telah dikemukakan di muka, persamaan gerak struktur ini dapat ditulis sebagai:



Gambar 31. *Cara Hölzer*

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{131}$$

Penyelesaian persamaan tersebut di atas dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\sin(\omega t) \tag{132}$$

Bila struktur bergerak dalam mode ke j, circular frequency ω adalah:

$$\omega = \omega_j \tag{133}$$

sehingga simpangan untuk massa i, y_{ij} diperoleh sebagai:

$$y_{ij} = A_{ij}\sin(\omega_j t) \tag{134}$$

dan percepatan $\ddot{y}_{ij}$ sebagai:

$$\ddot{y}_{ij} = \omega_j^2 A_{ij}\sin(\omega_j t) \tag{135}$$

yang dengan memperhatikan persamaan 134 dapat diubah menjadi:

$$\ddot{y}_{ij} = \omega_j^2 y_{ij} \tag{136}$$

Dengan menggunakan dynamic equilibrium dari D'Alembert, pada massa m_i dapat dianggap terdapat gaya sebesar:

$$P_{ij} = \ddot{y}_{ij}\, mi \tag{137}$$

Substitusi persamaan 136 ke persamaan 137 menghasilkan:

$$P_{ij} = \omega_j^2 y_{ij} \tag{138}$$

Gaya geser antara massa m_i dan massa $m_{(i+1)}$ dapat diperoleh dengan mengalikan simpangan relatif antara massa m_i dan massa $m_{(i+1)}$. Dengan kekakuan tingkat tersebut akan didapatkan gaya geser di atas lantai ke i, $Q_{(i+1)}$ j, sebagai:

$$Q_{(i+1)j} = \left(y_{(i+1)j} - y_{ij}\right)k_{(i+1)} \tag{139}$$

Keseimbangan horizontal struktur di atas lantai ke i menghasilkan:

$$Q_{(i+1)j} = \sum_{k=(i+1)}^{n} P_{kj} \tag{140}$$

Dari persamaan 139 dan 140 diperoleh:

$$y(i+1)j - y_{ij} = \frac{\sum_{k=(i+1)}^{n} P_{kj}}{k(i+1)} \tag{141}$$

atau:

$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \frac{\sum_{k=(i+1)}^{n} P_{kj}}{k_{(i+1)}} \tag{142}$$

Memperhatikan persamaan 138, persamaan 142 dapat ditulis sebagai:

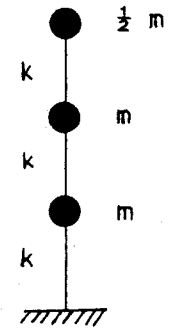
$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \frac{\sum_{k=(i+1)}^{n} \omega_j^{\,2}\, y_{kj}\, mk}{k_{(i+1)}} \qquad (143)$$

Persamaan 143 merupakan dasar dari cara Hölzer. Terlihat dari persamaan 143, bila simpangan di atas massa ke i, $y_{(i+1)j}$, $y_{(i+2)j}$, ..., y_{nj}, dan circular frequency untuk mode ke j, ω_j telah diketahui, maka simpangan pada massa ke i, y_{ij} dapat diketahui. Dengan demikian simpangan pada massa-massa yang lain (di bawah massa ke i) juga berturut-turut dapat diperoleh dengan cara yang sama. Dalam hal circular frequency ω_j yang dipakai adalah circular frequency yang sebenarnya, maka simpangan pada dasar struktur, y_{oj} adalah nol. Karena ω_j yang dipergunakan belum diketahui maka proses ini harus dilakukan dengan cara coba-coba sampai didapatkan harga ω_j yang menghasilkan y_{oj} nol.

Sebagai kesimpulan perhitungan (circular) frequency dengan cara Hölzer dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan perkiraan circular frequency mode yang dicari, ω_j.
2. Tentukan simpangan lantai teratas, y_{nj}, sebagai satu unit, y_{ij} = 1.
3. Berturut-turut hitung simpangan lantai-lantai di bawahnya, $y_{(n-1)\,j}$ sampai dengan simpangan di dasar struktur y_{oj}.
4. Bila circular frequency yang dipilih dalam langkah pertama adalah circular frequency yang benar maka simpangan pada dasar struktur y_{oj} harus sama dengan nol. Bila y_{oj} ternyata tidak nol maka cobalah perkiraan ω_j lain dan ulangilah langkah 1 sampai 4.
5. Setelah melakukan perkiraan ω_j dua kali maka perkiraan selanjutnya dapat diperoleh dengan menggambarkan grafik yang mempunyai sumbu horisontal ω_j dan sumbu vertikal y_{oj}. ω_j yang benar dapat diperoleh dari perpotongan grafik tersebut dengan sumbu ω_j (Gambar 33).

Untuk menjelaskan lebih lanjut cara ini, ikutilah perhitungan circular frequency dari sistem dengan derajat kebebasan tiga di bawah ini (Gambar 32).



Gambar 32. *Contoh cara Hölzer*

Matriks massa **M** dari sistem tersebut adalah:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (144)$$

sedangkan matriks kekakuan **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} k \qquad (145)$$

Sebagai percobaan pertama ditetapkan harga ω^2 sebesar 0,4 k/m, kemudian dilakukan perhitungan seperti terlihat dalam Tabel 4. Ternyata ω_2 yang dipilih menghasilkan y_0 = 0.352 sehingga harus dilakukan perhitungan selanjutnya. Misalnya kemudian dipilih ω^2 sebesar 0.8 k/m. Ternyata pilihan ini menghasilkan y_0 = - 0.934 (Tabel 5). Dalam taraf ini untuk mendapatkan pilihan yang lebih terarah dapat digambarkan grafik antara ω^2 dan y_0 (Gambar 33). Dengan memperhatikan grafik ini, misalnya dipilih ω^2 = 0,2 k/m yang kemudian menghasilkan y_0 = 0,216 (Tabel 6). Hasil ini juga digambarkan dalam grafik. Harga ω^2 yang dipilih kemudian adalah 0,27 k/m. Harga ω^2 ini menghasilkan y_0 = 0,007 (Tabel 7) yang cukup dekat dengan nol. Dengan demikian harga circular frequency yang diperoleh adalah ω = 0,52 $\sqrt{(k/m)}$.

Tabel 4: $\omega^2 = 0.4$ k/m

massa no:	m	$m\omega^2$	y	$m\omega^2 y$	Σ	1/k	Σ. 1/k
3	0.5	0.2	1.0	0.2	0.2	1.0	0.4
2	1.0	0.4	0.8	0.32	0.52	1.0	0.88
1	1.0	0.4	0.28	0.112	0.632	1.0	0.654
0			-0.352				

rumus:

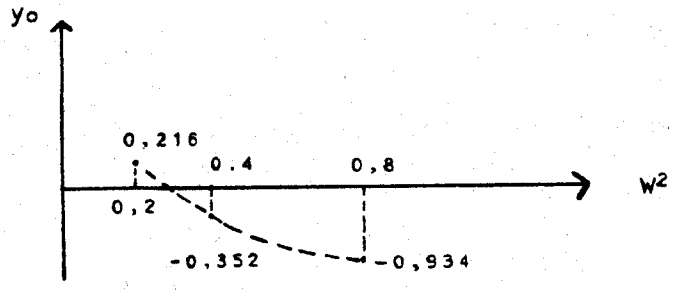
$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \left(\sum_{k=(i+1)}^{n} \omega_j^{\,2}\, mk \right) / k_{(i+1)}$$

Tabel 5: $\omega^2 = 0.8$ k/m

massa no:	m	$m\omega^2$	y	$m\omega^2 y$	Σ	1/k	Σ. 1/k
3	0.5	0.4	1.0	0.4	0.4	1.0	0.4
2	1.0	0.8	0.6	0.48	0.88	1.0	0.88
1	1.0	0.8	-0.28	0.224	0.654	1.0	0.654
0			-0.934				

Rumus:

$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \left(\sum_{k=(i+1)}^{n} \omega_j^{\,2}\, y_{kj}\, mk \right) / k_{(i+1)}$$



Gambar 33

Tabel 6: $\omega^2 = 0.2$ k/m

massa no:	m	$m\omega^2$	y	$m\omega^2 y$	Σ	1/k	Σ. 1/k
3	0.5	0.1	1.0	0.1	0.1	1.0	0.1
2	1.0	0.2	0.9	0.18	0.28	1.0	0.28
1	1.0	0.2	-0.62	0.124	0.404	1.0	0.404
0			-0.216				

rumus:

$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \left(\sum_{k=(i+1)}^{n} \omega_j^{\,2}\, y_{kj}\, mk \right) / k_{(i+1)}$$

Tabel 7: $w^2 = 0.27$ k/m

massa no:	m	$m\omega^2$	y	$m\omega^2 y$	Σ	1/k	Σ. 1/k
3	0.5	0.135	1.0	0.135	0.135	1.0	0.135
2	1.0	0.27	0.865	0.234	0.369	1.0	0.369
1	1.0	0.27	0.496	0.134	0.503	1.0	0.503
0			0.007				

Rumus:

$$y_{ij} = y_{(i+1)j} - \left(\sum_{k=(i+1)}^{n} \omega_j^{\,2}\, y_{kj}\, mk \right) / k_{(i+1)}$$

Perhitungan dalam Tabel 4 dan 7 dapat dengan mudah dilakukan dengan menggunakan suatu program kecil dalam suatu programble calculator.

Dengan cara Hölzer ini simpangan y yang didapat dari perhitungan di atas (Tabel 7) adalah mode shape dari circular frequency, ω, yang bersangkutan. Bentuk mode shape ini dapat digunakan untuk menentukan circular frequency dari mode ke berapa yang diperoleh. Dalam contoh di atas, melihat mode shape

yang diperoleh, ternyata ω yang didapat adalah circular frequency dari mode yang pertama.

Sebagai pedoman bentuk mode shape ke n akan memotong garis vertikal n kali. Jadi bentuk mode shape 1, memotong garis vertikal 1 kali.

Bila struktur yang ditinjau adalah struktur yang mempunyai banyak derajat kebebasan maka cara ini sangat tidak praktis bila digunakan untuk mencari seluruh circular frequency mode yang ada. Dengan perkembangan komputer pribadi yang pesat, perhitungan circular frequency dan mode shape ini dapat dilakukan dengan mudah. Misalnya dengan menggunakan cara Jacobi [10, 11].

1.8.3.2 Cara Jacobi

Cara Jacobi adalah suatu cara yang dapat digunakan untuk mencari Eigenvalue dan Eigenvector dari problema Eigen yang standar, yaitu:

$$[\mathbf{K}-1\mathbf{I}]\mathbf{A}=0 \qquad (146)$$

Dalam keadaan di atas, **I** adalah matriks satuan (bandingkan dengan persamaan 150).

Bila dengan satu dan lain cara dapat ditentukan suatu matriks yang nonsingular dan mempunyai sifat:

$$\mathbf{X}^{-1}\,\mathbf{K}\,\mathbf{X}=\mathbf{L} \qquad (147)$$

di mana matriks **L** adalah suatu matriks diagonal, maka elemen diagonal matriks **L**, l_{11}, l_{22} adalah eigenvalue dari matriks **K**, sedangkan kolom ke i dari matriks **X** adalah eigenvalue dari eigenvalue l_i [10].

Selain itu diketahui pula [10] bahwa eigenvalue dari dua buah matriks **A** dan **B** adalah sama bila matriks **A** dan **B** tersebut adalah matriks similar, yaitu mempunyai sifat:

$$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} \qquad (148)$$

di mana matriks **P** adalah suatu matriks yang nonsingular.

Prinsip dari metode Jacobi adalah menghilangkan elemen-elemen matriks **K** yang berada di luar diagonal utama secara berurutan dengan menggunakan transformasi-transformasi *similar*

(similarity transformation), yaitu dengan menggunakan matriks rotasi **R**. Jika elemen k_{ij} dan k_{ji} hendak dijadikan nol maka matriks rotasi **R** adalah:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & & i & & j & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & -s & \cdots\cdots & i \\ & & \vdots & & & \\ & & s & c & & j \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (149)$$

Dalam persamaan 149, s adalah sin θ dan c adalah cos θ Besar sudut θ tergantung kepada elemen matriks **K** pada transformasi sebelumnya, yaitu:

$$\tan(2\theta)=\frac{2\,k_{ij}}{k_{ii}-k_{jj}}, \quad \text{untuk } k_{ii} \neq k_{jj} \text{ dan,}$$

$$\theta=\pi/4 \quad \text{untuk } k_{ii}=k_{jj} \qquad (150)$$

Matriks rotasi **R** merupakan suatu matriks orthogonal, yaitu matriks yang mempunyai sifat $\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^{T}$. Dengan demikian transformasi similar dilakukan berturut-turut pada matriks **K** sebagai:

$$\mathbf{K}_{(n+1)}=\mathbf{R}_n^{T}\,\mathbf{K}_n\,\mathbf{R}_n \qquad (151)$$

Dalam persamaan 128, $\mathbf{K}_n$ adalah matriks **K** hasil transformasi ke n.

Cara Jacobi yang dibahas di atas adalah cara Jacobi yang hanya dapat digunakan pada suatu problema eigen standar dan matriks **K** yang simetris dan tidak dapat digunakan secara langsung untuk mencari circular frequency dari suatu sistem dinamis. Hal tersebut dapat diatasi dengan menggunakan transformasi berikut.

Persamaan karakteristik suatu sistem dinamis adalah:

$$[\mathbf{K}-\omega^2\,\mathbf{M}]\mathbf{A}=\mathbf{0} \qquad (152)$$

Bila matriks **A** kita ganti dengan:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-0.5}\,\mathbf{B} \tag{153}$$

maka persamaan 152 menjadi:

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\,\mathbf{M}\right]\mathbf{M}^{-0.5}\,\mathbf{B}=\mathbf{0} \text{ atau,}$$

$$\left[\mathbf{K}\mathbf{M}^{-0.5}-\omega^2\,\mathbf{M}^{+0.5}\right]\mathbf{B}=\mathbf{0} \tag{154}$$

Bila persamaan 154 dikalikan di depan (*premultiplied*) dengan matriks $\mathbf{M}^{-0.5}$ akan didapatkan:

$$\left[\mathbf{M}^{-0.5}\,\mathbf{K}\mathbf{M}^{-0.5}-\omega^2\,\mathbf{I}\right]\mathbf{B}=\mathbf{0} \tag{155}$$

Matriks $\mathbf{M}^{-0.5}\,\mathbf{K}\mathbf{M}^{-0.5}$ merupakan matriks yang simetris. Persamaan 155 adalah problema eigen standar yang dapat diselesaikan dengan cara Jacobi di atas.

Perhatikan bahwa dalam setiap transformasi, elemen luar diagonal yang dalam transformasi sebelumnya sudah nol bisa saja menjadi tidak nol kembali sehingga transformasi similar ini harus dilakukan terus sampai elemen-elemen luar diagonal matriks K menjadi nol atau mendekati nol dalam suatu toleransi yang telah ditentukan. Ada beberapa variasi dari cara Jacobi [11] yang mempunyai konvergensi jauh lebih cepat dari cara yang dibicarakan di atas.

1.8.4 Sifat Orthogonal Mode Shape

Dua buah vektor A dan B dikatakan orthogonal bila perkalian kedua vektor tersebut adalah nol.

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{B} = 0 \tag{156}$$

Bila ω_n dan ω_m adalah dua buah akar dari persamaan karakteristik dari:

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\,\mathbf{M}\right]\mathbf{A}=\mathbf{0} \tag{157}$$

maka akan didapatkan hubungan sebagai berikut:

$$\omega_n^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_n = \mathbf{K}\,\mathbf{A}_n \tag{158}$$

$$\omega_m^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_m = \mathbf{K}\,\mathbf{A}_m \tag{159}$$

Dalam persamaan 158 dan 159, vektor $\mathbf{A}_n$ dan $\mathbf{A}_m$ masing-masing adalah karakteristik vektor (atau mode shape) dari ω_m dan

ω_m. Pengalian di belakang (*postmultiply*) tanspose persamaan 138 dengan vektor $\mathbf{A}_m$ menghasilkan:

$$\left(\omega_n^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_n\right)^T\,\mathbf{A}_n = \left(\mathbf{K}\,\mathbf{A}_n\right)^T\,\mathbf{A}_m \tag{160}$$

atau:

$$\left(\omega_n^2\,\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{M}^T\right)\mathbf{A}_m = \left(\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{K}^T\right)\mathbf{A}_m \tag{161}$$

Pengalian di depan (*premultiply*) persamaan 159 dengan transpose dari vektor $\mathbf{A}_n$ menghasilkan:

$$\omega_m^2\,\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_n^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{A}_m \tag{162}$$

Karena matriks **M** dan matriks **K** adalah matriks yang simetris maka:

$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ dan

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K} \tag{163}$$

Dengan demikian, dengan memperhatikam persamaan 163, pengurangan persamaan 161 dengan persamaan 162 menghasilkan:

$$\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_m = 0 \tag{164}$$

Karena akar karakteristik ω_n tidak sama dengan ω_m, maka:

$$\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}_m = 0 \tag{165}$$

Sedangkan dari persamaan 165 dan 162 serta memperhatikan bahwa akar persamaan karakteristik ω_n tidak sama dengan nol maka akan diperoleh:

$$\mathbf{A}_n^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{A}_m = 0 \tag{166}$$

Keadaan yang ditunjukkan dalam persamaan 165 dan 166 ini menunjukkan bahwa mode shape mempunyai sifat orthogonal terhadap matriks kekakuan **K** dan matriks massa **M**.

Bila suatu matriks ϕ dibentuk dengan menggunakan characteristic vector, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ maka:

$$\phi^T\,\mathbf{K}\,\phi = \mathbf{K}^*d$$

$$\phi^T\,\mathbf{M}\,\phi = \mathbf{M}^*d \tag{167}$$

Subscript d pada matriks **K*** dan **M*** menunjukkan bahwa kedua matriks tersebut adalah matriks diagonal.

1.8.5 Persamaan Modal

Perhatikan persamaan gerak getaran tak bebas untuk sistem berderajat kebebasan banyak di bawah ini:

$$M\ddot{y} + K y = F(t) \tag{168}$$

misalkan:

$$y = \phi y^* \text{ dan}$$

$$\ddot{y} = \phi \ddot{y}^* \tag{169}$$

di mana ϕ adalah matriks dengan elemen-elemen karakteristik vektor $\mathbf{A_n}$ sehingga persamaan gerak 168 menjadi:

$$M\phi\ddot{y}^* + K\phi y^* = F(t) \tag{170}$$

Pengalian di depan (premultiply) persamaan 170 dengan matriks ϕ^T menghasilkan:

$$\phi^T M\phi\ddot{y}^* + \phi^T K\phi y^* = \phi^T F(t) \tag{171}$$

Dari sifat orthogonal mode shape (166), persamaan 171 menjadi:

$$Md^*\ddot{y}^* + Kd^* y^* = \phi^T F(t) \tag{172}$$

Terlihat bahwa persamaan 172 adalah persamaan yang terurai (*uncoupled*), yaitu terdiri dari n buah persamaan getaran dengan derajat kebebasan satu (*single degree of freedom system*). Persamaan yang telah terurai ini dapat diselesaikan sebagai getaran dengan derajat kebebasan satu, yaitu:

$$m_{ii}^*\ddot{y}^*_i + k_{ii}^* = \sum_{l=1}^{n}\phi_{li} F_l(t),\ i = 1 \ldots\ldots n \tag{173}$$

Karena karakteristik vektor A^n hanya merupakan suatu perbandingan maka perbandingan ini dapat dibuat sedemikian rupa menjadi $\mathbf{A_n}'$, sehingga:

$$A_n{}^{1T} M A_n{}^{1} = 1 \tag{174}$$

Karakteristik vektor A_n' yang mempunyai sifat seperti persamaan 173 dinamakan *normalized characteristic vector*. Bila suatu matriks ϕ' dibentuk dengan menggunakan normalized characteristic vector, maka:

$$\phi'^T M \phi' = I \tag{175}$$

Dari persamaan 153, untuk ω_i didapat hubungan:

$$K\phi' = \omega_i{}^2 M\phi' \tag{176}$$

Pengalian di muka (premultiply) persamaan 176 dengan ϕ'^T menghasilkan:

$$\phi'^T K\phi' = \omega_i{}^2 \phi'^T M\phi' \tag{177}$$

Menggunakan persamaan 175, persamaan 177 menghasilkan hubungan:

$$\phi'^T K\phi' = \omega_i{}^2{}_d \tag{178}$$

yaitu suatu matriks diagonal yang diagonal utamanya adalah kuadrat dari circular frequency ω_i.

Bila untuk pembentukan matriks ϕ dipakai normalized characteristic vector:

$$y = \phi' y^* \text{ dan}$$

$$\ddot{y} = \phi' \ddot{y}^* \tag{179}$$

maka persamaan 172 menjadi:

$$I_d^*\ddot{y}^* + \omega_i{}^2{}_d\, y^* = \phi^T F(t) \tag{180}$$

Persamaan 180 adalah n buah persamaan yang terurai (uncoupled), yaitu n buah persamaan getaran dengan derajat kebe basan satu (*single degree of freedom system*), yaitu:

$$\ddot{y}^*_i + \omega_i{}^2 y^* = \sum_{l=1}^{n}\phi'_{li} F_l(t)\ ,\ i=1 \ldots n \tag{181}$$

Ingat bahwa y* bukan merupakan penyelesaian yang sebenarnya. Selain daripada itu harus diingat bahwa y* yang didapat dari persamaan 181 tidak sama dengan y* yang didapat dari persamaan 173. Penyelesaian sebenarnya dapat diperoleh dari persamaan 169 atau 179:

1.8.6 Struktur Berderajat Kebebasan Banyak dengan Damping

Persamaan gerak struktur berderajat kebebasan banyak dengan damping dapat diturunkan sebagai:

$$\mathbf{M}\ddot{y} + \mathbf{C}\dot{y} + \mathbf{K}y = \mathbf{F}(t) \qquad (182)$$

Seperti pada struktur tanpa damping, dengan menggunakan:

$$y = \phi y^*$$

$$\dot{y} = \phi \dot{y}^*$$

$$\ddot{y} = \phi \ddot{y}^* \qquad (183)$$

di mana ϕ adalah matriks dengan elemen-elemen normalized characteristic vector, $\mathbf{A_i}$'. Persamaan 160 dapat diubah menjadi:

$$\mathbf{M}\phi\ddot{y}^* + \mathbf{C}\phi\dot{y}^* + \mathbf{K}\phi y^* = \mathbf{F}(t) \qquad (184)$$

yang bila dikalikan di muka dengan ϕ^T menjadi:

$$\phi^T \mathbf{M}\phi\ddot{y}^* + \phi^T \mathbf{C}\phi\dot{y}^* + \phi^T \mathbf{K}\phi y^* = \phi^T \mathbf{F}(t)\phi \qquad (185)$$

atau:

$$\ddot{y}^* + \phi^T \mathbf{C}\phi\dot{y}^* + \omega_i{}^2{}_d\, y^* = \phi^T \mathbf{F}(t)\phi \qquad (186)$$

Persamaan 186 hanya dapat menjadi n buah persamaan yang terpisah bila suku kedua dari persamaan 186, yaitu perkalian matriks $\phi^T C\phi$ menghasilkan matriks diagonal. Hal ini hanya mungkin bila besar damping, **C**, dapat dinyatakan dalam kombinasi antara matriks **M** dan matriks **K** sebagai:

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \qquad (187)$$

Misalnya **C** adalah sedemikian rupa sehingga:

$$\mathbf{A_j}^T \mathbf{C}\, \mathbf{A_i} = 0 \qquad \text{untuk } i \neq j$$

$$\mathbf{A_i}^T \mathbf{C}\, \mathbf{A_i} = 2\beta\, \omega_i \qquad \text{untuk } i = j \qquad (188)$$

Dengan demikian (persamaan 188), persamaan 186 menjadi:

$$\ddot{y}^* + 2\beta\omega_i \dot{y}^* + \omega_i{}^2\, y^* = \sum_{l=1}^{n} \phi_{li}\, F_l(t) \;,\; i=1 \ldots n \qquad (189)$$

Anggapan dalam persamaan 187 sama dengan menganggap bahwa koefisien damping dalam suatu mode tertentu adalah sebesar β kali critical damping dalam mode tersebut.

$$C_i = \beta\, Ccri \qquad (190)$$

Perhatikan bahwa dalam persamaan 189, ω_i adalah circular frequency untuk sistem tanpa damping (natural circular frequency).

1.8.7 Gerakan pada Pondasi

Persamaan gerak suatu struktur berderajat kebebasan banyak yang digerakkan pada pondasinya dapat diturunkan dengan cara yang sama dengan penurunan persamaan gerak untuk struktur dengan derajat kebebasan satu sebagai berikut. Bila gerakan pada pondasi dinyatakan sebagai y_0 dan gerakan pada massa m_i dinyatakan sebagai y_{1i}, maka dengan menggunakan prinsip dynamic equilibrium dari D'Alembert persamaan gerak sistem tersebut dapat diturunkan sebagai:

$$\mathbf{M}\ddot{y}_1 + \mathbf{C}(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) + \mathbf{K}(y_1 - y_0) = 0 \qquad (191)$$

Perhatikan bahwa untuk gaya inersia harus dipergunakan percepatan absolut pada massa yang ditinjau, $\ddot{y}_{1i}$, sedangkan untuk gaya perlawanan dari per digunakan selisih antara gerakan pada massa, y_{1i}, dengan gerakan pada pondasi, y_0. Bila gerakan relatif dari massa terhadap gerakan pondasi, $(y_{1i} - y_0)$, dinyatakan sebagai y, maka:

$$y = (y_1 - y_0)$$

$$\dot{y} = (\dot{y}_1 - \dot{y}_0)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_0) \text{ , dan}$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y} + \ddot{y}_0 \qquad (192)$$

Dengan demikian persamaan gerak 191 berubah menjadi:

$$\mathbf{M}(\ddot{y} + \ddot{y}_0) + \mathbf{C}\dot{y} + \mathbf{K}y = 0 \text{ , atau}$$

$$\mathbf{M}\ddot{y} + \mathbf{C}\dot{y} + \mathbf{K}y = -\mathbf{M}\ddot{y}_0 \qquad (193)$$

Perhatikan bahwa persamaan gerak ini (193) sama dengan persamaan gerak getaran tak bebas (persamaan 182), dengan matriks gaya pada massa **F(t)** sebesar (-**M** $\ddot{y}_0$. Dengan demikian semua pembahasan yang telah dilakukan juga berlaku untuk gerakan pada pondasi. Dengan anggapan-anggapan dan cara yang sama, persamaan 193 dapat diuraikan menjadi n buah persamaan yang terpisah sebagai:

$$\ddot{y}^*_i + 2\beta\omega_i \dot{y}^* + \omega_i^2 y^* = -\ddot{y}_0 \sum_{l=1}^{n} \phi_{li}\, ml \quad , i=1 \ldots n \qquad (194)$$

Di mana:

$$\mathbf{y} = \phi\, \mathbf{y}^* \qquad (195)$$

Dalam persamaan 195, matriks ϕ adalah matriks yang elemen-elemennya terdiri dari normalized characteristic vector $\mathbf{A_i}$' Perlu diingat pula bahwa dalam hal gerakan pada pondasi, simpangan **y** adalah simpangan relatif antara dua massa yang berurutan.

BAGIAN KEDUA
DASAR PERENCANAAN BANGUNAN TERHADAP GEMPA

2.1 PENDAHULUAN

Dalam bagian pertama telah dibicarakan dasar-dasar analisis dan perencanaan struktur terhadap beban dinamis. Dalam bagian ini akan dibahas secara khusus respons dinamis bangunan terhadap beban gempa. Salah satu cara perhitungan respons suatu bangunan terhadap gempa adalah dengan cara *static equivalent*, yaitu suatu cara di mana beban dinamis diubah menjadi beban statis yang mempunyai efek ekuivalen dengan beban dinamis yang diharapkan. Beban static equivalent ini biasanya diatur dalam peraturan-peraturan bangunan tertentu. Cara static equivalent ini tidak akan dibicarakan di dalam bagian ini. Cara yang akan dibicarakan adalah cara perhitungan secara dinamis.

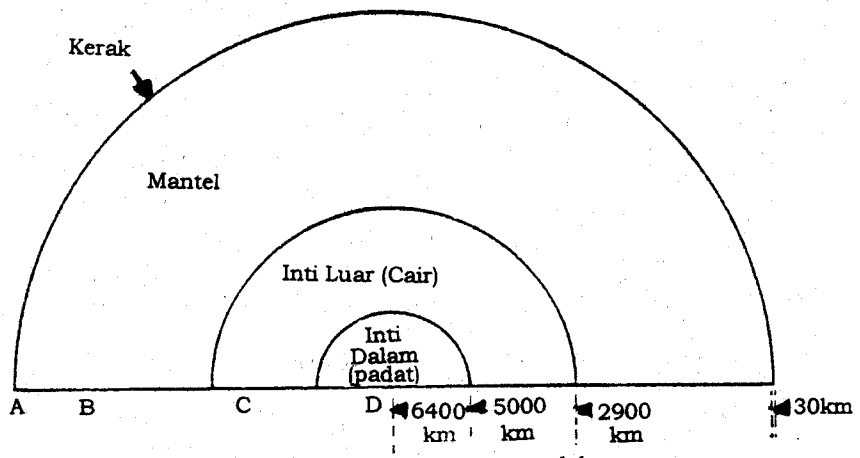
Perhitungan respons dinamis suatu bangunan terhadap beban gempa dapat dibagi menjadi dua bagian besar, yaitu perhitungan respons riwayat waktu (*time history analysis*) yang biasanya dilakukan dengan memakai analisis numerik, serta perhitungan dengan cara analisis ragam spektrum respons (*modal analysis*).

Cara analisis numerik untuk beban yang diberikan pada massa struktur yang ditinjau telah dibahas dalam bagian pertama. Karena pembebanan pada pondasi (dalam hal ini gempa) dapat ditinjau sebagai pembebanan pada massa struktur, maka penyelesaian dengan cara numerik yang telah dibahas dalam bagian satu dapat langsung dipakai untuk perhitungan respons

terhadap gempa. Dalam bagian ini secara spesifik akan dibicarakan cara analisis ragam spektrum respons (modal analysis).

2.1.1 Struktur Bumi dan Daerah Gempa

Struktur bumi (Gambar 34) diperkirakan terdiri dari beberapa lapisan. Lapisan yang terluar adalah kerak bumi (*earth crust*). Kerak bumi ini merupakan lapisan yang keras dan mempunyai tebal yang bervariasi antara 5 sampai 60 km. Di daratan kerak bumi ini dapat mencapai tebal 40 km, sedangkan di daerah yang bergunung tinggi dapat mencapai sekitar 60 km. Di lautan yang dalam, kerak ini bisa setipis 5 sampai 8 km saja. Lapisan yang kedua, di bawah kerak bumi, terdapat suatu lapisan batu-batuan yang dinamakan mantel (*mantle*). Mantel ini diperkirakan ada dalam keadaan plastis atau semiplastis dengan kedalaman mencapai 2900 km. Lapisan ketiga adalah suatu lapisan yang dinamakan inti luar (*outer core*). Inti luar ini berada dalam keadaan cair dan diperkirakan sampai kedalaman 5000 km. Lapisan yang paling dalam dinamakan inti dalam (*inner core*) yang padat dan diperkirakan terdiri atas besi, nikel dan zat-zat padat lainnya. Perkiraan lapisan bumi ini didapatkan berdasarkan teori gelombang bumi yang tidak akan dibahas di sini. Tekanan di dalam bumi diperkirakan dapat mencapai tiga juga atmosfer.



A-- Kerak
B-- Mantel
C-- Inti Luar yang Cair
D-- Inti Dalam yang Padat

Gambar 34. *Struktur bumi*

Gambar 35 menunjukkan gempa yang terjadi di dunia yang dilaporkan oleh US Coast and Geodetic Survey. Pada tahun 1966 distribusi secara geografis yang ditunjukkan dalam gambar tersebut merupakan representasi dari gempa yang tercatat dalam abad ini. Gambar tersebut juga menunjukkan adanya dua buah jalur utama gempa, yaitu:

1. Jalur Sirkum Pasifik (*Circum Pacifik Belt*) yang dimulai dari Amerika Selatan naik ke Utara mengelilingi Lautan Pasifik untuk kemudian turun ke Selatan melewati Jepang, Taiwan, Phlipina, Sulawesi, Irian dan berakhir di New Zealand.
2. Jalur Trans Asiatik (*Trans Asiatic Belt*) yang melalui Mediterania, Himalaya, kemudian melalui Sumatra menunju Jawa, Nusa Tenggara untuk kemudian bergabung dengan jalur sirkum pasifik di Sulawesi. Satu cabang dari jalur trans asiatik ini menuju ke daratan Cina.

Gambar 36 menunjukkan jalur gempa di Indonesia secara lebih mendetail.

2.1.2 Istilah-istilah yang Banyak Digunakan

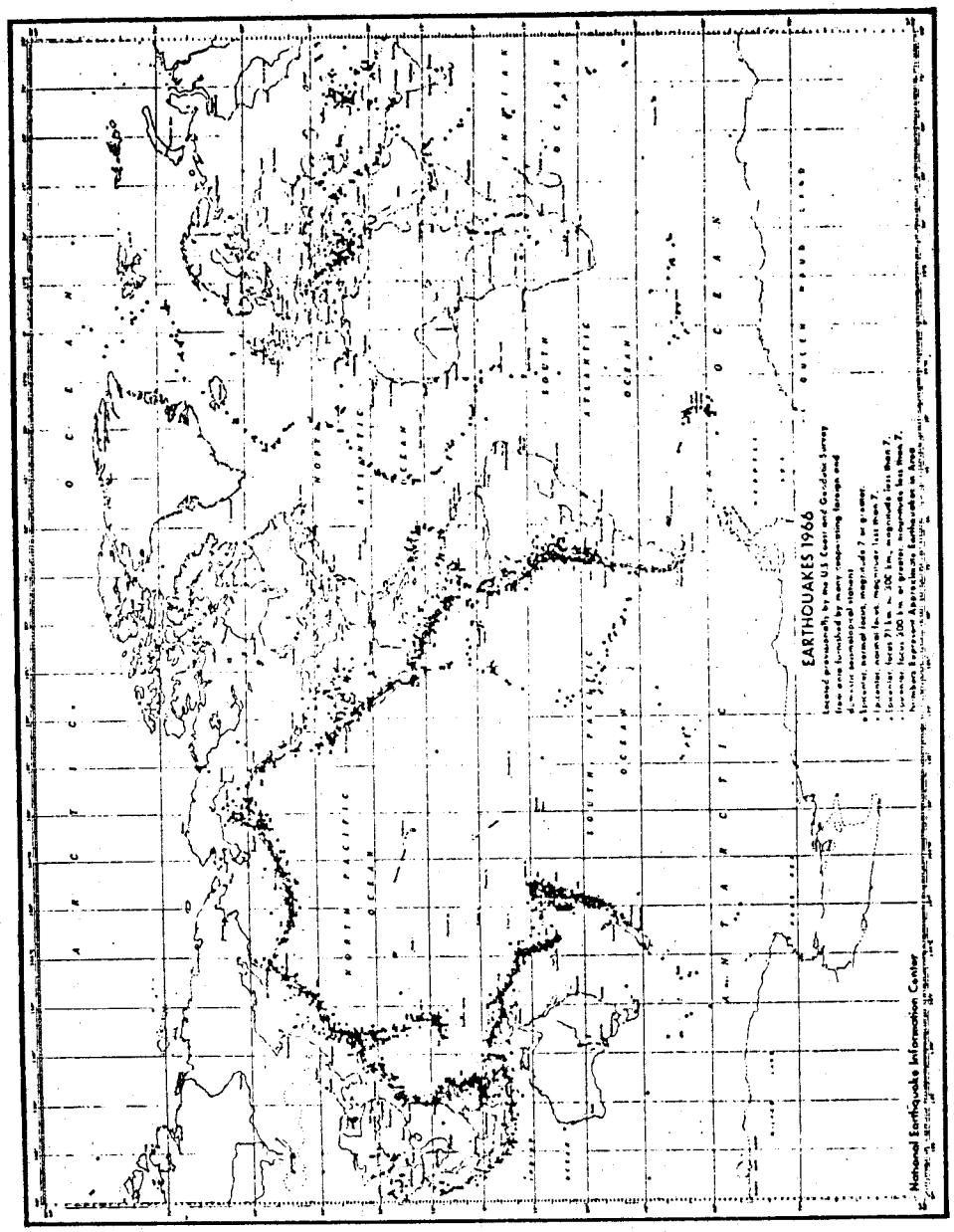
Untuk memperlancar pembahasan lebih lanjut maka dalam bagian ini akan dibahas beberapa istilah yang sering digunakan dalam pembahasan mengenai gempa. Istilah-istilah lain yang lebih spesifik akan dijelaskan pada waktu diperlukan.

2.1.2.1 Seismograph

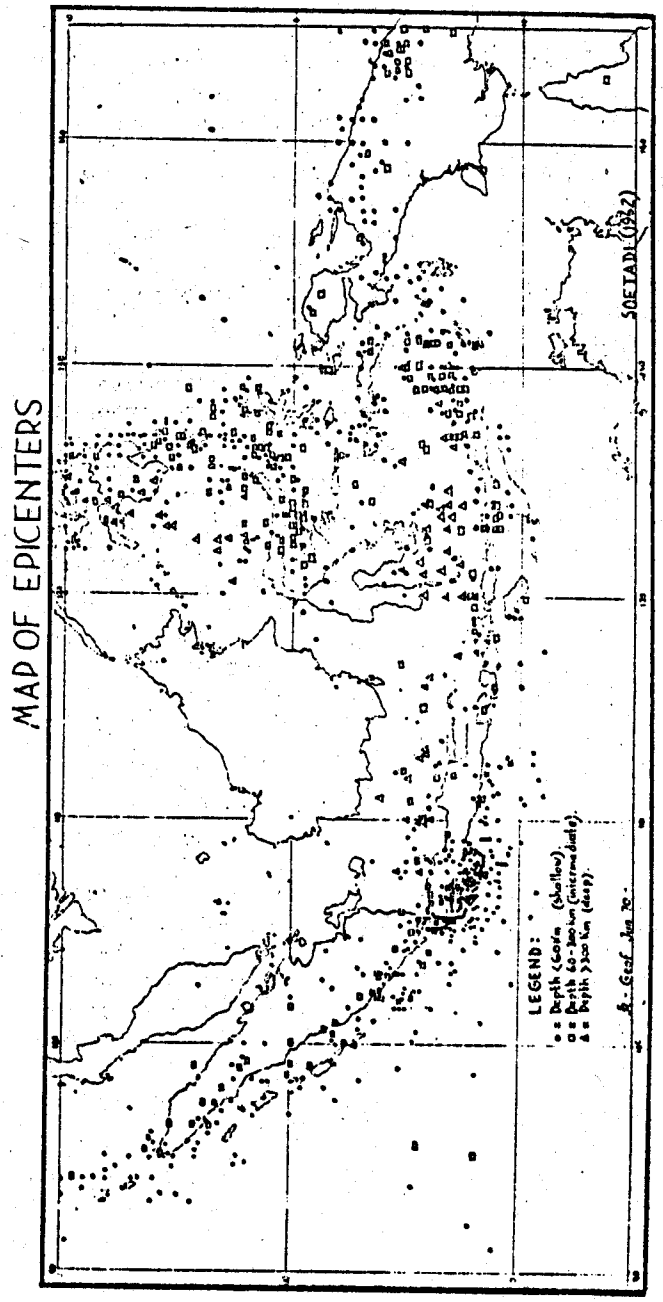
Seismograph adalah suatu alat yang digunakan untuk mencatat gerakan-gerakan tanah, misalnya simpangan (*displacement*), kecepatan (*velocity*) atau percepatan (*acceleration*), tergantung dari alatnya, bila alat tersebut mencatat percepatan (acceleration) gerakan tanah, alat tersebut dinamakan Accelerograph.

2.1.2.2 Seismogram

Seismogram adalah catatan yang berupa grafik yang didapatkan dari seismograph. Grafik yang mencatat percepatan (acceleration) gerakan tanah dinamakan Accelerogram.

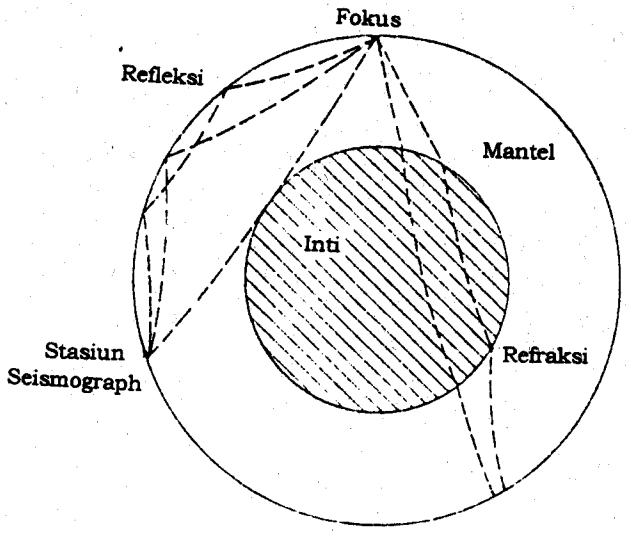


Gambar 35. *Gempa yang terjadi sampai dengan tahun 1966*



Gambar 36. *Jalur gempa di Indonesia*

2.1.2.3 Focus atau Hypocenter dan Epicenter



Gambar 37. *Focus dan Epicenter*

Focus atau hypocenter adalah pusat gempa yang terdapat di dalam bumi sedangkan epicenter adalah titik di permukaan bumi tepat di atas hipocenter (Lihat Gambar 37).

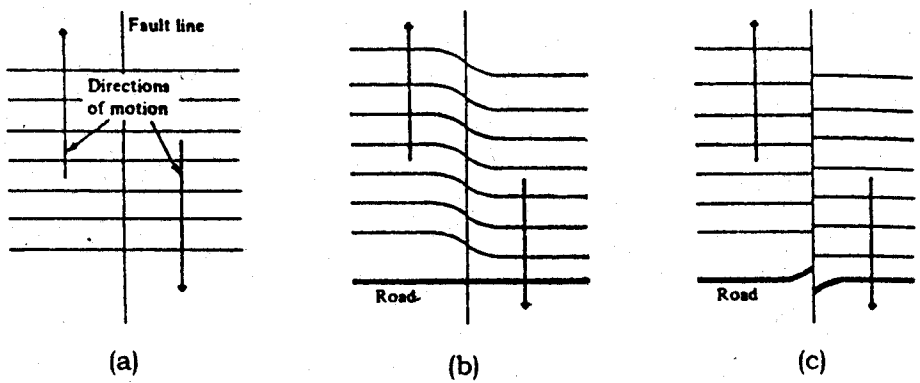
Suatu gempa dinamakan gempa dangkal (*shallow focus earthquake*) bila focus dari gempa terletak antara 0 sampai 70 km. Sedangkan bila focus gempa terletak antara 70 sampai dengan 300 km maka gempa tersebut dinamakan gempa menengah (*intermediate focus earthquake*). Gempa yang mempunyai focus lebih dalam dari 300 km dinamakan gempa dalam (*deep focus earthquake*).

2.1.3 Mekanisme Terjadinya Gempa

Seperti problema-problema mendasar dalam bidang sains, mekanisme terjadinya gempa sampai sekarang masih tetap merupakan tanda tanya. Dahulu orang mengira bahwa penyebab terjadinya gempa adalah Dewa Atlas yang capai mendukung bumi dan kemudian memindahkan beban bumi dari bahu yang satu ke bahu lainnya, atau karena adanya ikan lele raksasa yang menggoyangkan badannya, atau yang agak bersifat ilmiah yang menyatakan adanya gua-gua maha besar di dalam tanah yang sewaktu-waktu runtuh atau karena adanya impak akibat jatuhnya meteor ke bumi. Sekarang orang percaya bahwa gempa terjadi akibat adanya letusan gunung berapi atau karena adanya kegiatan tektonik di dalam bumi. Gempa yang terjadi karena adanya letusan gunung berapi dinamakan gempa vulkanik sedangkan gempa yang terjadi karena adanya kegiatan tektonik dinamakan gempa tektonik.

Untuk mempelajari proses perencanaan struktur terhadap gempa tentu diperlukan pengetahuan tentang gempa itu sendiri. Hal ini sebetulnya merupakan bidang ilmu lain yang dinamakan *seismologi*. Berlainan dengan seorang seismolog, seorang yasawan (*engineer*) hanya tertarik kepada gempa-gempa besar (*strong motion earthquake*). Gempa-gempa besar ini biasanya merupakan shallow focus earthquake yang terjadi karena suatu proses tektonik. Proses ini antara lain menyebabkan terjadinya gunung-gunung. Ledakan gunung berapi tidak lagi dianggap sebagai penyebab gempa dangkal yang besar. Salah satu teori yang banyak dianut untuk menjelaskan shallow earthquake ialah *Elastic Rebound Theory*.

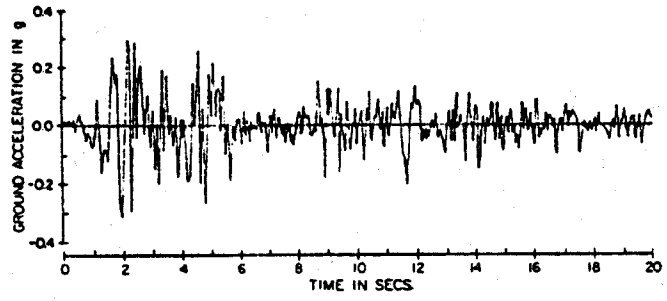
Teori elastic rebound ini diusulkan oleh HF. Reid berdasarkan studi terhadap retakan yang terjadi di San Andreas Fault pada waktu terjadi gempa San Francisco pada tahun 1906. Menurut teori tektonik lempeng, kerak bumi terdiri atas beberapa lempeng yang bergerak satu terhadap lainnya. Batas antara dua buah lempeng dinamakan retakan kerak bumi atau sesaran (*fault*). Menurut teori elastic rebound, sebab dari gempa adalah adanya pelepasan *elastic strain energy* yang terjadi dengan tiba-tiba. Elastic strain energy ini tertumpuk karena adanya gerakan antara lempengan kerak bumi. Bila pada suatu tempat tertentu *fracture strength* dari kerak bumi terlampaui, titik ini akan melepaskan elastic strain energy yang merupakan penyebab terlampauinya fracture strength di titik-titik lainnya (Gambar 38). Dengan demikian maka akan terjadi pelepasan energi yang besar sekali yang mengakibatkan terjadinya gempa.



Gambar 38. *Elastic Rebound Theory*

2.1.4 Ukuran Gempa

Suatu contoh accelerogram adalah accelerogram dari gempa El Centro, 18 Mei 1940 (Gambar 39). Gambar tersebut menunjukkan komponen Utara-Selatan dari Gempa El Centro.



Gambar 39. *Gempa El Centro, komponen Utara-Selatan, 18 Mei 1940*

Bagi seorang yasawan struktur, hal yang penting diperhatikan tentulah efek gempa tersebut terhadap bangunan. Ada tiga macam ukuran gempa yang biasa dipakai untuk menyatakan besarnya suatu gempa, yaitu:

a. Magnitude
b. Energy yang dilepas dan
c. Intensity

2.1.4.1 Magnitude

Magnitude adalah suatu besaran yang menggambarkan besarnya strain energy yang dilepaskan waktu terjadinya gempa. Ada beberapa rumusan untuk mencari magnitude ini, yang paling umum dipakai ialah definisi magnitude yang diberikan oleh Richter,

$$M = {}^{10}\log A - {}^{10}\log A_0 \qquad (196)$$

di dalam persamaan di atas, A adalah amplitudo maximum dalam mm yang tercatat dengan alat standard pada jarak 100 km dari Epicenter. Alat standard yang dimaksud di sini adalah suatu Wood-Anderson seismograph dengan natural period 0.8 det, static magnification 2800 dan damping ratio 0.8. A_0 adalah aplitudo dari gempa standard yang besarnya adalah 10^{-3} mm untuk jarak 100 km. Gempa standard ini dinamakan juga Zero shock, karena untuk A sama dengan A_0 akan didapat magnitude gempa M = 0, atau dengan kata lain gempa standard adalah gempa yang mempunyai magnitude nol pada skala Richter.

Biasanya letak seismograph yang mengukur tidak akan mungkin tepat pada 100 km dari epicenter (jauh lebih dari 100 km) maka amplitudo A diperoleh dengan cara extrapolasi dari amplitudo yang tercatat.

Skala Richter adalah suatu cara yang baik untuk menyatakan besar gempa. Tetapi karena perhitungan magnitude ini mengabaikan ketidak-uniforman dari kerak bumi, orientasi dari fault, dan lain-lain, ukuran ini bukanlah ukuran yang tepat. Dalam arti kata lain, magnitude yang sama tidaklah berarti besar gempa yang sama.

Magnitude juga tidak menyatakan besar kerusakan yang terjadi di suatu daerah tertentu.

2.1.4.2 Energy

Ada beberapa perumusan yang menyatakan besarnya energi gempa (seismic energy) yang dikeluarkan oleh sumber gempa. Secara umum perumusan energy ini dihubungkan dengan besar magnitude sebagai berikut:

$^{10}\log E = {}^{10}\log E_0 + a\,M$ [Erg] (197)

Diantaranya rumus yang banyak dipakai adalah:

$^{10}\log E = 11.8 + 1.5\,m$, Rumus Newmark

$^{10}\log E = (12.24 \pm 1.35) + (1.44 \pm 0.20)\,M$, Rumus Bath

$^{10}\log E = 11.4 + 1.5\,M$, Rumus Guttenberg (198)

Dalam rumus-rumus di atas, E adalah besar energy dalam erg, sedangkan M adalah besar magnitude menurut skala Richter. Rumus-rumus ini merupakan rumus empiris yang dibuat berdasarkan gempa-gempa yang telah terjadi. Hubungan antara energy total dan energy gempa dapat ditulis sebagai berikut:

$E = \gamma\,Et,\ \gamma < 1$ (199)

Dalam rumus di atas Et adalah energy total yang dibebaskan dan γ adalah koefisien yang tergantung dari mekanisme gempa. Dalam kenyataannya hanya sebagian kecil dari energy total diubah menjadi energy gempa. Sebagai contoh suatu bom sebesar 1 megaton, melepaskan energy sebesar 5.10^{22} erg, sedangkan untuk mendapatkan getaran gempa dengan magnitude 7.3 diperlukan 50 megaton.

2.1.4.3 Intensity

Intensity adalah ukuran dari daya rusak (destructiveness) suatu gempa di suatu tempat tertentu. Dengan demikian suatu gempa hanya mempunyai satu magnitude, tetapi mempunyai bermacam-macam intensity yang berbeda dari tempat pengamatan ke tempat pengamatan.

Ada beberapa macam skala intensity yang diusulkan dan telah digunakan, beberapa di antaranya ialah:

a. Modified mercalli (M.M Scale)
b. Mercalli – Cancani – Sieberg (M.C.S Scale)
c. Rossi - Forrel
d. Medvedev – Sponheuer – Karnik (M.S.K Scale)
e. Japan Meteorogical Agency (JMA Scale)

Skala M.M banyak dipakai di Amerika Utara, M.C.S dan Rossi-Forrel banyak dipakai di Eropa dan tentu saja JMA dipakai di Jepang. Sebagai contoh skala intensitas lihatlah skala JMA di bawah ini.

Terlihat bahwa dengan skala intensitas ini sangat baik untuk memberikan gambaran kerusakan suatu daerah akibat terjadinya gempa.

Tabel 3: Contoh Skala Intensitas

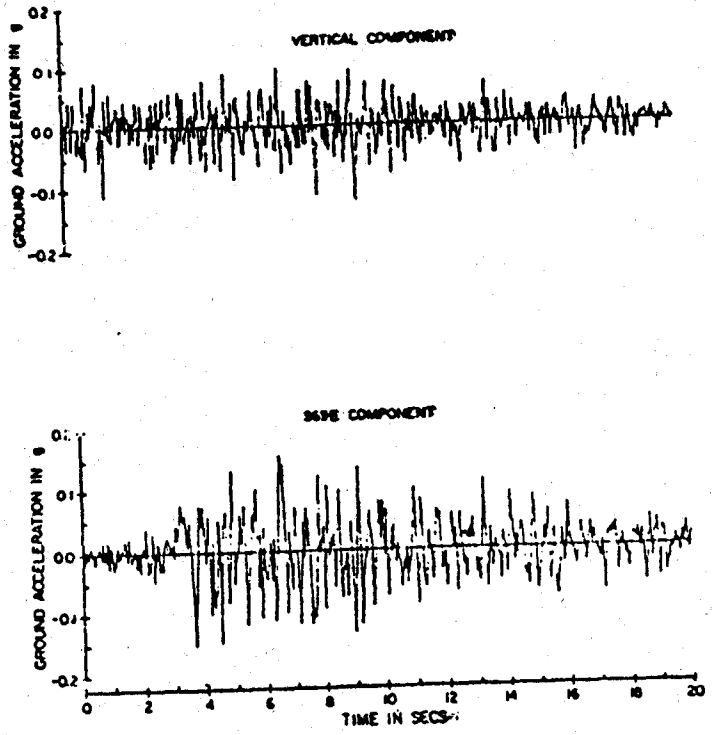
JMA intensity Scale

0. No sensation, registered by seismograph but no perception by human body.
I. Slight, felt by person at rest or person especially sensitive to Earthquake.
II. Weak, felt by most persons, slight rattling of doors and Japanese latticed paper sliding door.
III. Rather strong, shaking of house and building, heavy rattling of doors and sliding doors, swinging of chandeliers and other hanging objects, movement of liquids in vessels.
IV. Strong, strong shaking of house and building; overturning of unstable objects, spilling of liquids out of vessel four fifths full.
V. Very strong, Cracking of plastered walls, overturning of tomb stones and stine lanterns, damage to monsonoy chimneys and mud plastered warehouses.
VI. Disastrous, demolition of up to 30% of Japanese wooden houses; numerous landslides and embankments failure; fissures on flat ground.
VII. Ruinous, demolition of more than 30% of Japanese wooden houses.

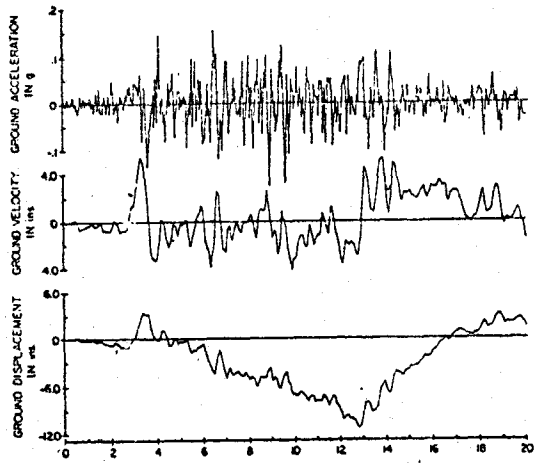
2.2 PERENCANAAN

Data yang sangat penting untuk merencanakan struktur terhadap gempa adalah data percepatan tanah pada waktu terjadi gempa besar (strong-motion earthquake, strong ground motion). Strong ground motion ini hanya dapat direkam pada strong-motion accelerograph. Suatu contoh dari gempa besar adalah gempa El Centro, 18 Mei 1940, yang mempunyai magnitude sebesar 7.1 pada skala Richter (gambar 39). Gambar 40 menunjukkan komponen vertikal dan komponen horizontal arah S69E sedangkan gambar 41 menunjukkan komponen N21E dari gempa Taft, California, 21 Juli 1952, yang mempunyai Magnitude 7.7.

Gambar 41 juga menunjukkan percepatan dan perpindahan tempat tanah yang diperoleh dengan mengintegrasi percepatan tanah yang bersangkutan. Untuk keperluan perencanaan, karakterisrik gempa terutama dapat ditunjukkan dengan Response Spectrum.



Gambar 40. *Komponen Vertikal dan Komponen S69E dari gempa Taft, California, 21 Juli 1952.*



Gambar 41. *Komponen N21E dari gempa Taft, California, 21 Juli 1952.*

2.2.1 Response Spectrum

Respons dari gerakan tak bebas dengan damping telah ditunjukkan dalam bagian pertama sebagai (90):

$$y = \int_0^t \frac{F_1 f(\Gamma)}{m \omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta \omega_n (t-\Gamma)} \sin\left(\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right) d\Gamma \qquad (200)$$

Atau untuk $F_1 = 1$

$$y = \int_0^t \frac{f(\Gamma)}{m \omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta \omega_n (t-\Gamma)} \sin\left(\omega_n \sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right) d\Gamma \qquad (201)$$

Persamaan gerak dari sistem dinamis dengan derajat kebebasan satu bila dibebani dengan percepatan gempa ialah:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k y = -m\ddot{y}_0 \qquad (202)$$

atau:

$$m\ddot{y} + 2m\omega_n \beta \dot{y} + k y = -m\ddot{y}_0 \qquad (203)$$

Dalam kedua persamaan di atas, y adalah simpangan relatif antara pondasi dan massa, sedangkan $\ddot{y}_0$ adalah percepatan pondasi (percepatan gempa). Dalam hal ini penyelesaian persamaan 203 dapat diperoleh dari persamaan 201 sebagai:

$$y = \int_0^t \frac{-m\,\ddot{y}_0(\Gamma)}{m\,\omega_n\sqrt{(1-\beta^2)}} e^{-\beta\omega_n(t-\Gamma)} \sin\left(\omega_n\sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right)d\Gamma \qquad (204)$$

Atau bila ω_n diganti dengan T, $\omega_n = 2\pi/T$, persamaan 204 menjadi:

$$y = \frac{-T}{2\pi\sqrt{(1-\beta)}} \int_0^t \ddot{y}_0(\Gamma) e^{-\beta(2\pi/T)(t-\Gamma)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{(1-\beta^2)}(t-\Gamma)\right)d\Gamma \qquad (205)$$

Untuk suatu accelerogram tertentu $\ddot{y}_0(t)$, dapat dicari y_{max} untuk damping ratio β dan periode T yang telah ditentukan. Grafik dari y_{max} untuk damping ratio β tertentu terhadap periode T sebagai variabel dinamakan *displacement respons spectrum*, S_d. Harus diingat bahwa y adalah simpangan relatif sehingga y_{max} adalah simpangan relatif maksimum. Selain itu dapat pula digambarkan *maximum relative velocity* yang dinamakan *velocity respons spectrum*, S_v dan *maximum absolute acceleration* yang dinamakan *acceleration respons spectrum*, S_a.

Percepatan relatif maksimum (maximum relative acceleration) yang dapat diperoleh dengan menurunkan y (persamaan 183) tidak terlalu berguna untuk perhitungan karena untuk mendapatkan gaya yang bekerja pada massa yang ditinjau diperlukan percepatan absolut pada massa tersebut. Untuk mendapatkan percepatan absolut, percepatan relatif harus ditambah dengan percepatan gempa $\ddot{y}_0$ tersebut. Hal ini agak rumit sehingga kemudian ditempuh cara yang lebih mudah, yaitu dengan mengingat bahwa gaya maksimum pada massa dapat juga diperoleh dengan mengalikan simpangan relatif maksimum dengan kekakuan per yang bersangkutan sehingga didapat hubungan:

$$Q_{max} = k\,y_{max} \qquad (206)$$

sedangkan Q_{max} juga dapat dinyatakan sebagai:

$$Q_{max} = m\,\ddot{y}_{max} \qquad (207)$$

sehingga didapat hubungan:

$$\ddot{y}_{max} = (k/m)\,y_{max} \qquad (208)$$

Untuk β kecil, misalnya $\beta \le 0.2$, circular frequency, ω, dapat dikatakan sama dengan ω_n sehingga:

$$(k/m) = \omega_n{}^2 = (2\pi/T)^2 \qquad (209)$$

Dengan demikian persamaan 208 dapat diubah menjadi:

$$(T/2\pi)\,\ddot{y}_{max} = (2\pi/T)\,y_{max} \qquad (210)$$

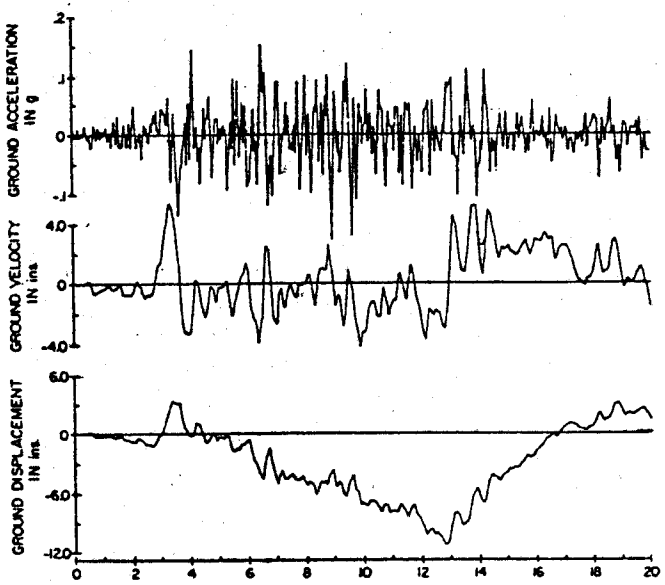
Memperhatikan persamaan 210 di atas maka dapat ditulis hubungan antara acceleration respons spectrum, S_a, dengan displacement respons spectrum, S_d, sebagai berikut:

$$(T/2\pi)S_a = S_{pv} = (2\pi/T)S_d \qquad (211)$$

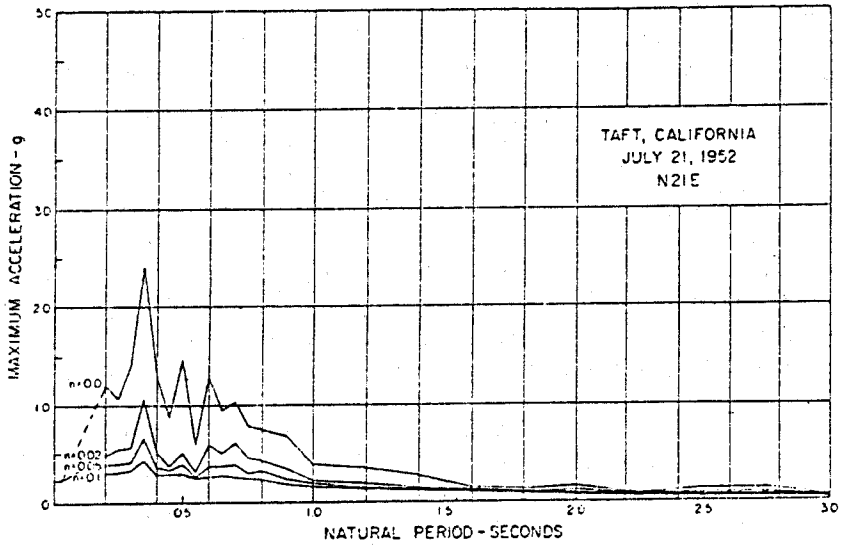
Dalam persamaan tersebut dikenalkan besaran baru, S_{pv}, yang *dinamakan Pseudovelocity Respons Spectrum* yang mempunyai hubungan dengan displacement dan acceleration respons spectrum sebagaimana terlihat dalam persamaan (211) di atas. Untuk gempa dapat ditunjukkan bahwa pada umumnya S_{pv} tidak berbeda jauh dengan S_v sehingga S_{pv}. dapat dianggap sebagai S_v .

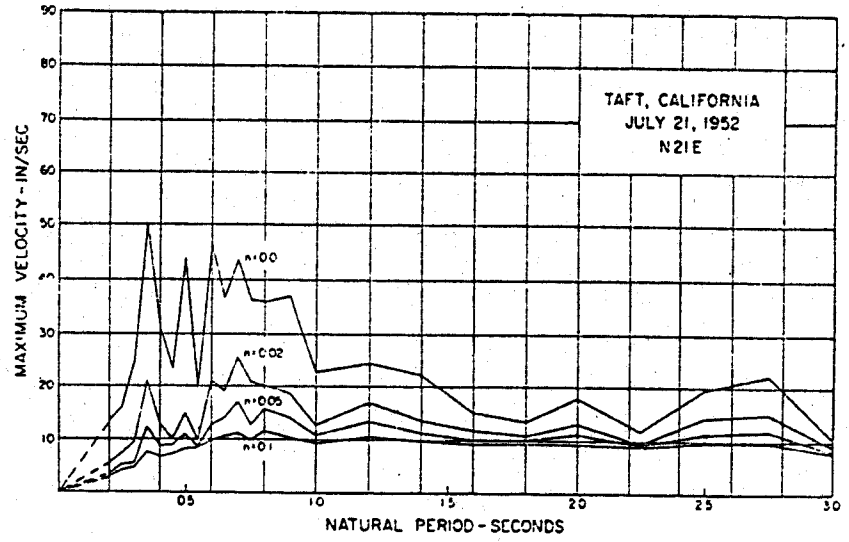
Gambar 42 menunjukkan komponen N21E dari gempa Taft, California, 21 Juli 1952, berupa percepatan serta kecepatan dan simpangan yang diperoleh dengan mengintegrasikan percepatan tersebut. Gambar 43 menunjukkan acceleration dan velocity response spectrum dari komponen N21E dari gempa Taft tersebut. Gambar 44 dan 45 berturut-turut menunjukkan komponen N-S dari gempa El Centro, 18 Mei 1940 dan respons spectrum yang bersangkutan.

Newmark [3] mengusulkan suatu cara untuk menggambarkan ketiga spectra, acceleration, velocity dan displacement, dalam satu gambar dengan menggunakan skala logaritma tiga arah. Gambar 46 menunjukkan gambar respons spectra komponen N-S dari gempa El Centro 18 Mei 1940 yang digambarkan dengan cara tersebut. Gambar seperti ini biasanya dinamakan gambar *tripartite*.

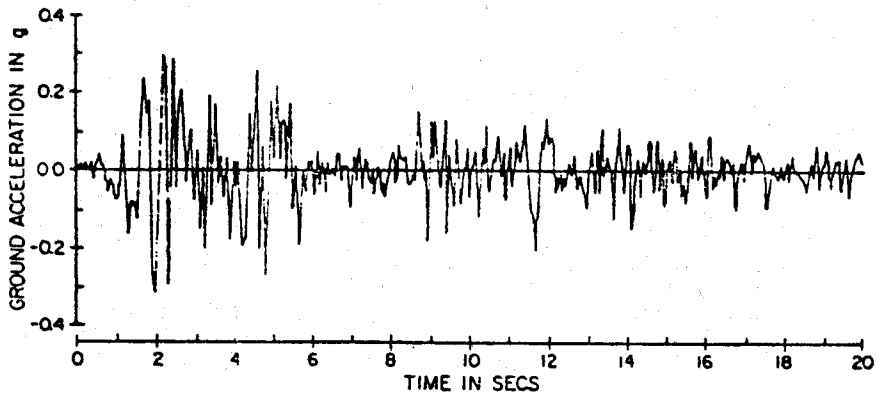


Gambar 42. *Komponen N21E gempa Taft, California, 21 Juli 1952*

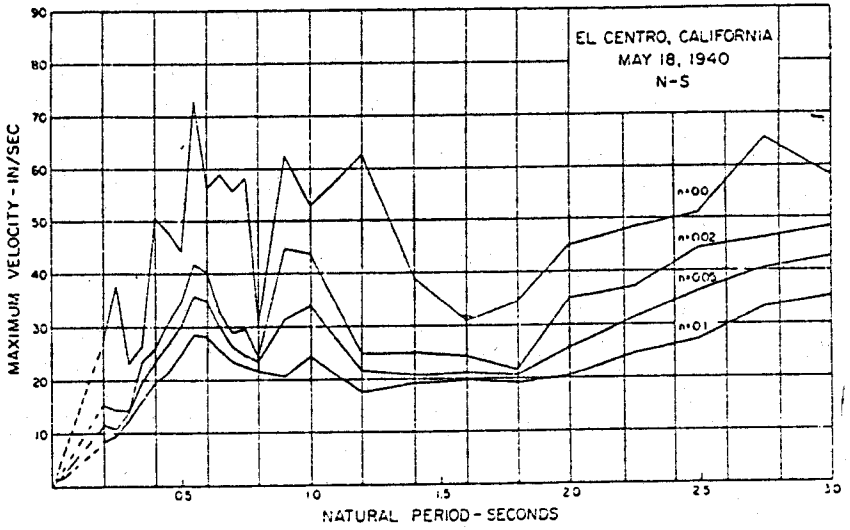


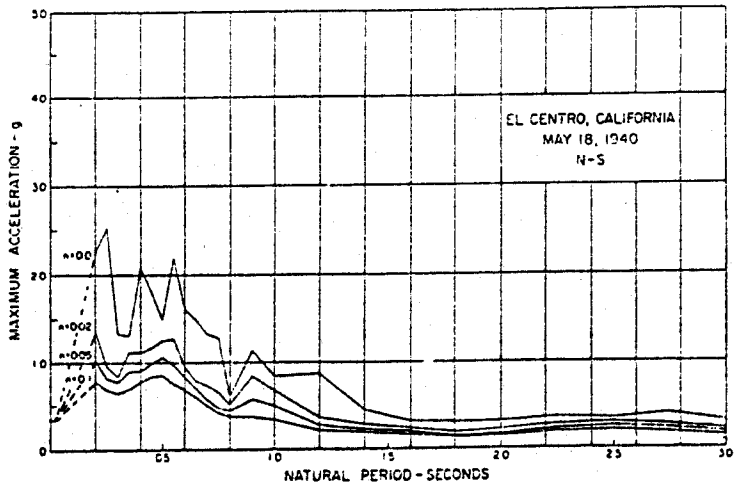


Gambar 43. *Respons Spectrum komponen N21E gempa Taft, California, 21 Juli 1952*

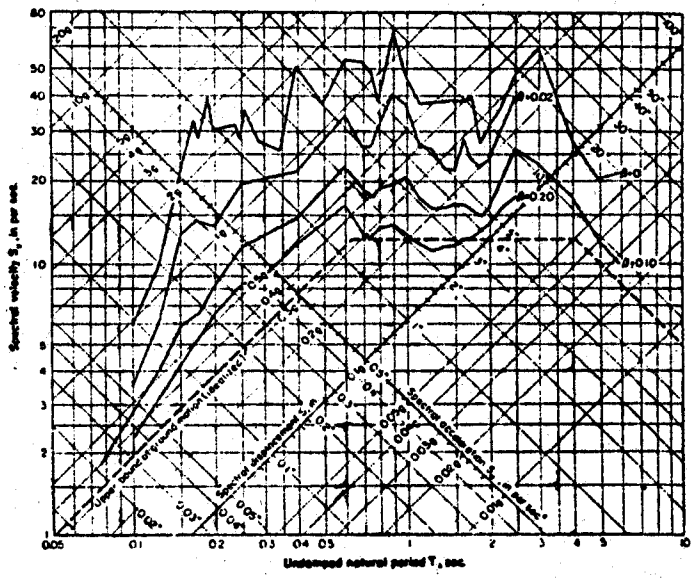


Gambar 44. *Komponen N-S gempa El Centro, California, 18 Mei 1940*

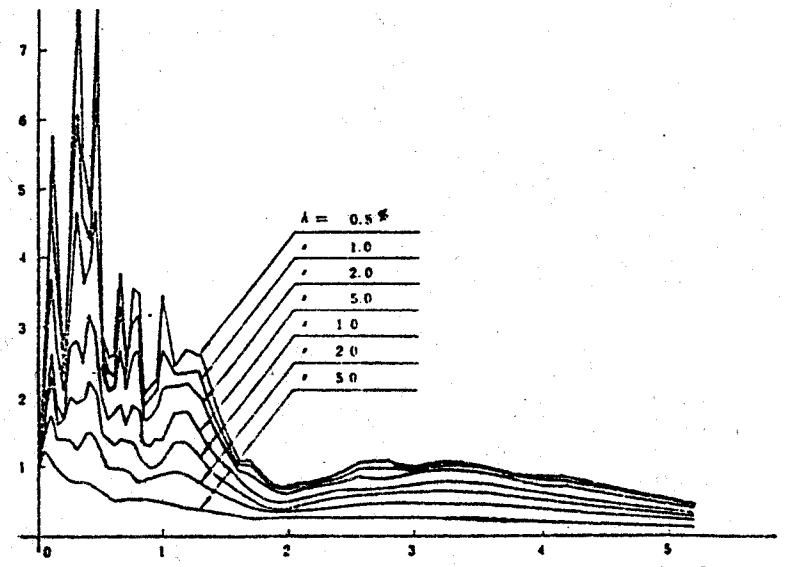




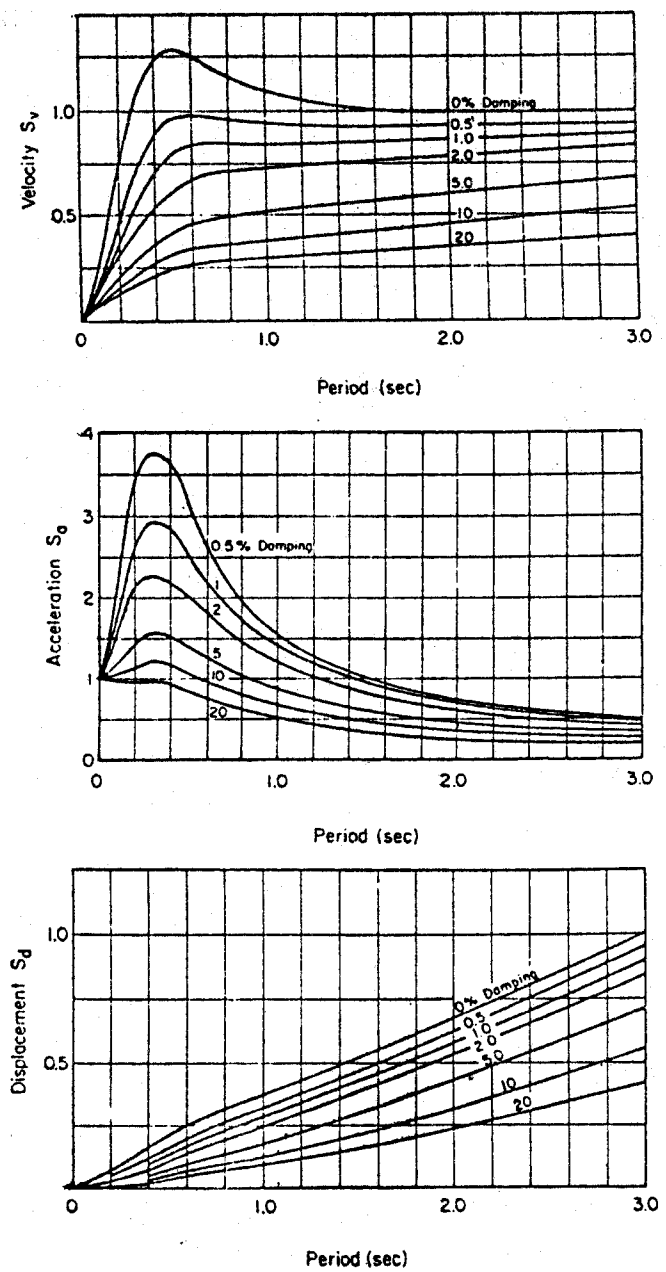
Gambar 45. *Respons spectrum komponen N-S gempa El Centro, California, 18 Mei 1940*



Gambar 46. *Respons spectrum dalam bentuk tripartite, komponen N-S gempa El Centro, California, 18 Mei 1940*

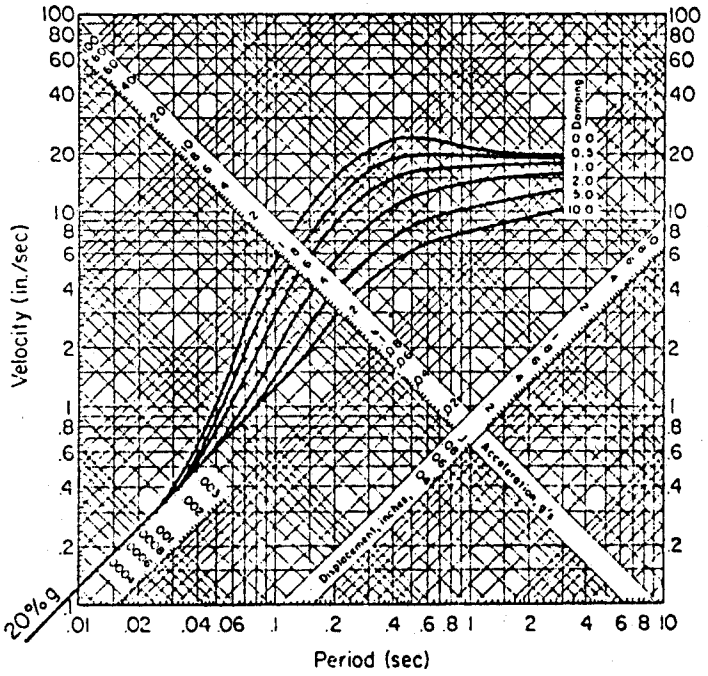


Gambar 47. *Normalized acceleration respons spectrum komponen NW gempa San Francisco, 9 Februari 1971*



Gambar 48. *Design Spectrum*

Karena langkanya rekaman gempa besar di suatu tempat maka untuk merencanakan suatu struktur di suatu tempat tertentu tidak mudah untuk memperoleh rekaman gempa yang diperlukan. Untuk keperluan itu biasanya dipergunakan beberapa rekaman gempa di tempat lain yang telah diskala percepatan maksimumnya sehingga sesuai dengan percepatan maksimum yang diharapkan dapat terjadi di daerah tersebut. Untuk maksud tersebut maka dibuat respons spektra untuk gempa yang telah diskala sehingga percepatan maksimumnya menjadi satu kali kecepatan gravitasi (1g). Respons spektra seperti itu dinamakan *normalized respons spectra*. Gambar 47 menunjukkan normalized acceleration spectrum untuk komponen N-W dari gempa San Fernando, 9 Februari 1971.



Gambar 49. *Bentuk Tripartite dari Design Spectrum*

Untuk daerah California, Housner telah membuat suatu *average respons spectra* dari gempa-gempa yang pernah terjadi di

California. Spektrum seperti ini kemudian dihaluskan (*smoothed*) dan dinamakan *design spectrum*. Gambar 48 menunjukkan velocity, acceleration dan displacement design spectrum sedangkan Gambar 49 menunjukkan bentuk tripartite dari spektrum tersebut. Design spectra dari Housner ini dipakai sebagai dasar untuk menentukan design spectra yang diberikan dalam peraturan-peraturan gempa.

2.2.2 Modal Analysis

Bila $\ddot{y}_0$ adalah percepatan gempa yang bekerja pada suatu struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan gerak sistem tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\ddot{y}_0 \qquad (212)$$

Di dalam persamaan tersebut **y** adalah vektor simpangan relatif antara massa dengan pondasi/tanah sedangkan $\ddot{y}_0$ adalah vektor yang elemen-elemennya adalah percepatan tanah (gempa), $\ddot{y}_0$.

Untuk mendapatkan respons riwayat waktu, persamaan 212 dapat diselesaikan secara langsung dengan menggunakan cara numerik, misalnya cara Constant velocity. Bila tidak dikehendaki respons riwayat waktu dan hanya dikehendaki respons maksimum maka cara modal analysis dapat dipergunakan.

Seperti telah dibahas dalam bagian pertama, persamaan gerak dari sistem dinamis dengan derajat kebebasan n dapat dipisahkan menjadi n buah persamaan dari sistem dinamis dengan derajat kebebasan satu, bila koefisien damping dalam suatu mode tertentu adalah sebesar β kali critical damping dalam mode tersebut.

$$C_i = \beta\, Ccri \qquad (213)$$

Dengan demikian persamaan 190 menjadi:

$$\ddot{y}^* + 2\beta(\omega_i)_d\, \dot{y}^* + (\omega_i)_d^2\, y^* = -\phi^T \mathbf{M}\ddot{y}_0 \qquad (214)$$

di mana:

$$\mathbf{y} = \phi\, \mathbf{y}^* \qquad (215)$$

Dalam persamaan di atas, matriks ϕ adalah matriks yang elemen-elemennya adalah normalized characteristic vector $\mathbf{A}_i$' sedangkan subscript **d** pada matriks ω_i dan ω_i^2 menunjukkan bahwa matriks tersebut adalah matriks diagonal dengan elemen ω_i dan ω_i^2 sehingga persamaan 215 dapat ditulis sebagai n buah persamaan dengan derajat kebebasan satu seperti di bawah ini.

$$\ddot{y}^*_i + 2\beta\omega_i\, \dot{y}^* + \omega_i^2\, y^* = -\ddot{y}_0\, g_i \;,\; i = 1 \ldots n \qquad (216)$$

Circular frequency ω_i dalam persamaan 194 adalah circular requency dari sistem tanpa damping (natural circular frequency) sedangkan g_i biasanya dinamakan modal participation factor dari mode ke i yang dapat diperoleh dari mode shape $\mathbf{A}_i$ sebagai:

$$g_i = \frac{\sum_{1=1}^{n} m_1\, A_{1i}}{\sum_{1=1}^{n} m1\, A_{1i}^2} \qquad (217)$$

Maximum respons dari sistem dinamis dengan derajat kebebasan satu (persamaan 216) dapat diperoleh dari respons spectrum gempa yang bersangkutan dikalikan dengan g_i. Dengan perkataan lain, y_i^* dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$y_i^* = g_i \cdot S_{di} \qquad (218)$$

Pada persamaan di atas g_i adalah modal participation factor dari mode ke i sedangkan S_{dj} adalah simpangan maksimum untuk mode ke i yang diperoleh dari displacement respons spectrum gempa yang bersangkutan.

Harus diingat di sini bahwa y_i^* bukan simpangan dari bangunan sesungguhnya. Untuk mendapatkan simpangan bangunan sesungguhnya harus digunakan transformasi (persamaan 215).

$$\mathbf{y} = \phi\, \mathbf{y}^* \qquad (219)$$

yang bila diuraikan lebih lanjut dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, y_j^* \;,\; i = 1 \ldots n \qquad (220)$$

Bila dalam mencari simpangan dalam mode ke j, y_j^*, digunakan response spectrum maka hanya akan didapatkan y_j^* maksi-

mum. Dengan demikian simpangan maksimum dari lantai ke i, y_i, yang diperoleh dari persamaan 220 hanya merupakan pendekatan. Cara ini dinamakan Analisis Ragam Spectrum Respons.

Untuk respons bangunan terhadap gempa ternyata bahwa:

1. Untuk bangunan bertingkat empat atau kurang, respons maksimum yang didapat dengan melakukan analisis riwayat waktu dengan cara numerik (*exact solution*) dapat didekati bila dilakukan penjumlahan sebagai berikut:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, g_j\, S_{dj} \qquad (221)$$

2. Untuk bangunan yang lebih tinggi dari 12 tingkat simpangan maximum dapat didekati dengan menggunakan *Root Mean Square* (RMS – sebenarnya *Square Root of Sum of Square* (SRSS), tetapi biasa disingkat dengan RMS) dari y_j^* maksimum sebagai berikut:

$$y_i = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} (A_{ij}\, g_j\, S_{dj})^2\right)} \qquad (222)$$

Selain daripada itu ternyata karena pengaruh dari mode yang tinggi tidak besar, penjumlahan dengan cara RMS tidak perlu dijumlahkan seluruh mode tetapi cukup dijumlahkan 3 atau 4 mode yang pertama:

$$y_i = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{4} (A_{ij}\, g_j\, S_{dj})^2\right)} \qquad (223)$$

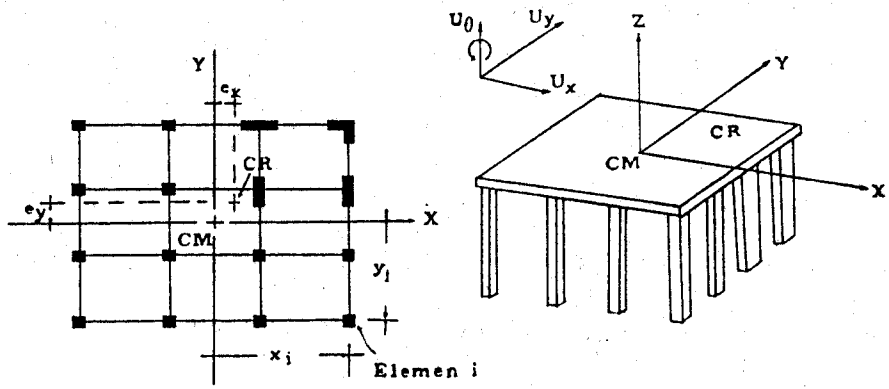
Percepatan $\ddot{y}_i$ dan kecepatan $\dot{y}_i$ pada masing-masing massa dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan menggantikan S_{di} berturut-turut dengan S_{ai} dan S_{ui}.

2.3 Hal-Hal Yang Harus Diperhatikan Dalam Perencanaan

Sampai pembahasan ini selalu dipakai anggapan bahwa struktur yang ditinjau dapat disederhanakan menjadi massa dan per (*lump mass system*) tanpa memperhatikan adanya torsi. Hal ini sebenarnya hanya dapat dilakukan bila pusat kekakuan (*center of stiffness*) berimpit dengan pusat massa (*center of mass*).

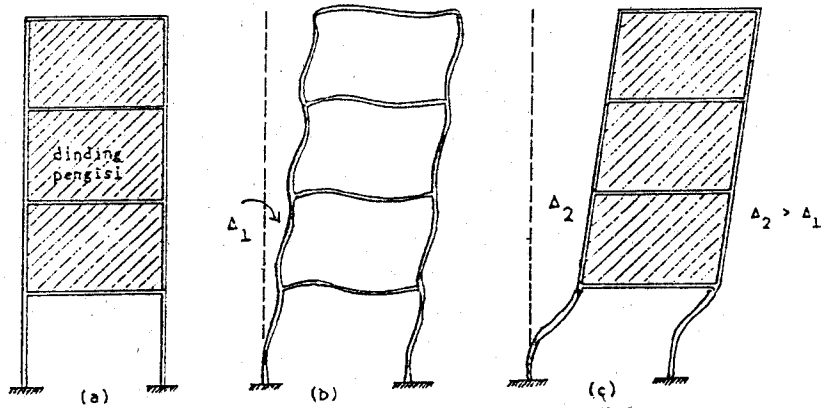
Perhatikan denah suatu struktur yang mempunyai pusat massa tidak berimpit dengan pusat kekakuan seperti yang terlihat dalam Gambar 50. Pusat massa merupakan titik tangkap dari gaya akibat gempa, sedangkan pusat kekakuan merupakan titik tangkap dari resultante gaya-gaya perlawanan karena kedua gaya

ini tidak berpotongan di satu titik. Oleh sebab itu supaya keseimbangan momen dapat dipenuhi, akan terjadi puntir, sehingga persamaan gerak yang telah diturunkan tidak berlaku. Untuk melihat gerakan yang terjadi dalam ruang, gunakan program gempa iii [9].



Gambar 50. *Puntir*

Perlu pula diperhatikan perubahan respons dari suatu bangunan karena pengaruh kekakuan yang tidak diperhitungkan, misalnya dinding pengisi yang pada waktu perhitungan struktur tidak diperhitungkan (Lihat Gambar 51 dan 52).



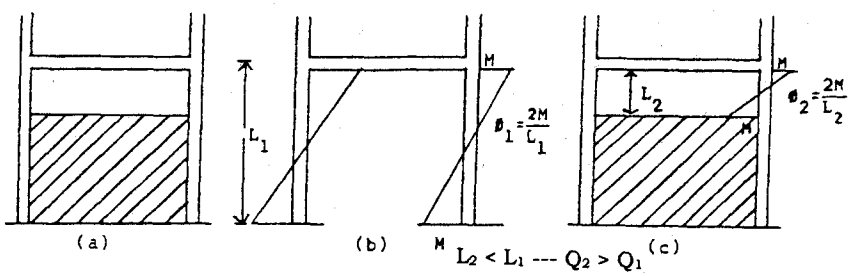
Gambar 51. *Pengaruh dinding pengisi*

Gambar 51.a menunjukkan gambar portal dalam keadaan sebenarnya. Portal ini biasanya direncanakan sebagai portal dalam Gambar 51.b di mana dinding pengisi diabaikan. Bila ternyata dinding pengisi cukup kuat maka dinding pengisi akan bertindak sebagai dinding geser (*shear wall*) dan mengubah respons portal yang terlihat dalam Gambar 51.b menjadi portal yang terlihat dalam Gambar 51.c.

Gambar 52 menunjukkan pengaruh lain yang dapat terjadi karena adanya dinding pengisi yang tidak diperhitungkan. Bila kolom direncanakan seperti Gambar 52.b terhadap momen lentur = M, maka gaya lintang yang dipakai untuk penentuan tulangan adalah $Q_1 = 2M/L_1$. Besar gaya lintang dalam Gambar 52.b ditunjukkan sebagai sudut kemiringan momen ϕ_1.

Bila dalam kenyataan terjadi keadaan seperti Gambar 52.c, kapasitas dari momen kolom tetap M. Untuk mengimbangi momen ini gaya lintang yang harus ditahan sesuai dengan *prinsip strong column weak beam* adalah $Q_2 = 2M/L_2$ (Lihat sudut ϕ_2 dalam Gambar 52.c) yang lebih besar dari Q_1 sehingga dapat terjadi kemungkinan kehancuran akibat gaya lintang.

Harus diperhatikan juga agar tidak terjadi perbedaan kekakuan yang besar antara kekakuan lantai satu dengan lantai yang lainnya. Hal ini akan menimbulkan kejadian yang dinamakan *soft storey*. Gerakan yang terjadi karena pengaruh soft storey ini dapat dilihat dengan program gempa ii [6].



Gambar 52. *Dinding pengisi sebagian*

Akhirnya karena perencanaan bangunan terhadap gempa merupakan perencanaan yang penuh ketidak-pastian maka penting sekali diperhatikan kemungkinan kehancuran (*mode of failure*) bila beban yang kita rencanakan ternyata terlampaui. Konsep strong column weak beam mengusahakan terjadinya mode of failure yang aman. Penting pula diperhatikan detail-detail perencanaan yang dapat menjamin daktilitas bangunan yang disyaratkan sehingga tidak terjadi kegagalan konstruksi yang bersifat getas (misalnya: runtuh akibat gaya lintang).

DAFTAR PUSTAKA

1. Biggs, JM., *Introduction to Structural Dynamics*, Mc. Graw Hill Book Company, New York, 1964
2. Clough, RW., Penzien, J., *Dynamics of Structures*, MC. Graw Hill Book Company, New York, 1975
3. Newmark, NM., Rosenblueth, E., *Fundamental of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Inc., New York, 1971
4. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Willey and Sons, Inc., New York, 1972
5. Taylor, EA., *Calculus with Analytic Geometry*, Maruzen Asian Edition, Maruzen Company Ltd., Prentice Hall, Inc., 1959
6. Rahardjo, B., Setiabudi, S., *Program Komputer untuk Pendidikan Bangunan Tahan Gempa*, Skripsi No. 318.S, Fakultas Teknik Jurusan Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, 1987
7. Fleming, JF., Romualdi, JP., "A General Procedure for Calculating Dynamic Response due to Impulsive Loads", Franklin Inst. Journal, Vol. 275, No. 2, hal. 107 – 120.
8. Gondokusumo, O., Soebiantoro, B., *Perbandingan Beberapa Metode Numerik untuk Penyelesaian Analisa Dinamis Struktur*, Skripsi No. 332.S, Fakultas Teknik Jurusan Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, 1987

9. Tanudjaja, S., Soegiantoro, S., *Program Komputer untuk Pendidikan Bangunan Tahan Gempa* (3 Dimensi), Skripsi No. 362.S, Fakultas Teknik Jurusan Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, 1989

10. Stewart, GW., *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, New York, 1973.

11. Bathe, KJ., Wilson, EL., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1976

APPENDIKS

```
C     CONTOH PROGRAM UNTUK CONSTANT VELOCITY
C
C     TN      = NATURAL PERIOD
C     DT      = TIME INTERVAL UNTUK INTEGRASI NUMERIK
C     NIN     = JUMLAH INPUT DATA UNTUK GAYA DINAMIS F(T)
C     TIME    = WAKTU DIMANA TERJADI PERUBAHAN GAYA
C               DINAMIS, BENTUK FUNGSI GAYA DIANTARA DUA
C               WAKTU BERURUTAN DIANGGAP BERUPA GARIS
C               LURUS
C     F       = BESAR GAYA DINAMIS F PADA WAKTU T  = TIME
C     XM      = MASSA
C     XK      = KEKAKUAN PER, PERHATIKAN SATUAN XM DAN
C               XK HARUS DISIMPAN DALAM SUATU FILE DATA
C               BARIS PERTAMA XM, XK, NIN (2F10.2, I10)
C               KEMUDIAN NIN BUAH PASANGAN TIME DAN F
C
      CHARACTER FRAME*15
      DIMENSION F(100), TIME (100)
      WRITE (*,' (A\)')' NAMA FILE DIMANA TERDAPAT INPUT
      DATA?'
      READ (*,' (A)') FNAME
      OPEN (6, FILE = ' LPT1')
      OPEN (9, FILE = FNAME)
      READ (9,1) XM, XK, NIN
    1 FORMAT (2F10.2, I10)
C     XM DAN XK ADALAH MASSA DAN KEKAKUAN
      DO 9001 I=1, NIN
```

```
      READ (9, 1) TIME(I),F(I)
9005 CONTINUE
      TN = 2*3.141592653*SQRT (XM/XK)
      DT = TN/10
      WRITE (*, 13)TN,DT
  13  FORMAT (' NATURAL PERIOD SISTEM ', F10.4,' SEC',/
     1,'  USULAN INTERVAL ',F10.4,' SEC')
      WRITE (*,' (A\')') ANDA TENTUKAN DT SEBESAR?'
      READ (*,'(F10.4)') DT
      WRITE (6,11)XM,XK,TN,DT
  11  FORMAT(' MASSA',F10.4,/,' KEKAKUAN ',F10.4,/
     1,'  NATURAL PERIOD ',F10.4/,' INTERVAL YANG DIPAKAI ',
     2F10.4)
      WRITE (6,2)
2     FORMAT(8X, 't', 9x, 'Y', 9X, 'F/M', 5X,' K/M Y', 5X,' D2Y',
     7X,' D2Y(DT)2')
      L= 2
      T0 = 0.0
      Y0 = 0.0
      FT0 = F(L-1)
      FM = FT0/XM
      YKM = Y0*XK/XM
      Y2D0 = FM-YKM
      YDT = Y2D0*DT**2
      Y1 = .5*FM*DT**2
9020 CONTINUE
      WRITE (6,21)T0,Y0,FM,YKM,Y2D0,YDT
21    FORMAT (2X,6F10.4)
      IF ((TIME(L)-T0).LT.0.0001)L=L+1
      IF (T0.GT.TIME(NIN))G0 T0 9999
      FT0 = FT0+(F(L)-FT0)/(TIME(L)-T0)*DT
      T0 = T0+DT
      FM = FT0//XM
      YKM = Y1*XK/XM
      Y2D0 = FM-YKM
      YDT = Y2D0*DT**2
      Y2 = 2*Y1-Y0+YDT
      Y0 = Y1
      Y1 = Y2
      GO TO 9020
9999 STOP
      END
```



```
C     CONTOH PROGRAM UNTUK CONSTANT VELOCITY UNTUK
C     STRUKTUR DENGAN DERAJAT KEBEBASAN LEBIH DARI
C     SATU PROGRAM INI HANYA DAPAT DIPAKAI UNTUK
C     STRUKTUR DENGAN MATRIX MASSA YANG DIAGONAL
C
C     DT      = TIME INTERVAL UNTUK INTEGRASI NUMERIK
C     NIN     = JUMLAH INPUT DATA UNTUK GAYA DINAMIS F(T)
C     TIME    = WAKTU DIMANA TERJADI PERUBAHAN GAYA
C               DINAMIS, BENTUK FUNGSI GAYA DIANTARA DUA
C               WAKTU YANG BERURUTAN DIANGGAP BERUPA
C               GARIS LURUS
C     F       = BESAR GAYA DINAMIS F PADA WAKTU T = TIME
C     XM      = MASSA
C     XK      = KEKAKUAN PER, PERHATIAN SATUAN
C               XM DAN XK HARUS DISIMPAN DALAM SUATU
C               FILE DATA
C               BARIS PERTAMA XM, XK, NIN (2F10.2,I10)
C               KEMUDIAN NIN BUAH PASANGAN TIME DAN F
C
      CHARACTER FNAME*15
      DIMENSION F(100,5), TIME(100,5), XM(5,5), XK(5,6)
      WRITE(*,'(A\')' NAMA FILE DIMANA TERDAPAT INPUT
      DATA?'
      READ (*,'(A)')FNAME
      OPEN (6,FILE='LPT1')
      OPEN (9,FILE=FNAME)
      READ (9,1)NIM,NIN
  1   FORMAT (2I10)
C     NIM = JUMLAH DERAJAT KEBEBASAN
C     NIN = JUMLAH PUNCAK DARI BEBAN F(T)
C     XM DAN XK ADALAH MASSA DAN KEKAKUAN
      DO 9002 I=1, NIM
            DO 9002 J=1, NIM
                  XM(I,J)=0.00
9002 CONTINUE
      DO 9003 I=1,NIM
            READ (9,2)XM(I,I), (XK(I,J), J=1, NIM)
9002 CONTINUE
      DO 9001 I=1, NIM
            READ (9,22) (TIME(I,J), F(I,J), J=1, NIM
9001 CONTINUE
22    FORMAT (10F8.4)
```

```
      WRITE (*,'(A)')' ANDA TENTUKAN DT SEBESAR?'
      READ (*, '(F10.4)') DT
      WRITE (6, 11)DT
11    FORMAT(' INTERVAL YANG DIPAKAI ',F10.4,/,' MASSA')
      DO 9004 I=1, NIM
            WRITE (6,23)(XM(I,J),J=1,N)
9004  CONTINUE
      WRITE (6,21)
21    FORMAT(//,' KEKAKUAN')
      DO 9005 I=1,NIM
            WRITE (6,23)(XK(I,J),J=1,N)
9005  CONTINUE
23    FORMAT (5F8.4)
      WRITE (6,2)
2     FORMAT (8X, 't', 9X, 'y', 9X, 'F/M', 5X, 'k//M y', 5X, 'D2Y',
      7X, 'D2Y(DT)2')
      L = 2
      T0 = 0.0
      Y0 = 0.0
      FT0 = F(L-1)
      FM = FT0/XM
      YKM = YO*XK/XM
      Y2D0 = FM-YKM
      YDT = Y2D0*DT**2
      Y1 = .5*FM*DT**2
9020  CONTINUE
      WRITE (6,21)T0, Y0, FM, YKM, Y2D0, YDT
21    FORMAT (2X, 6F10.4)
      IF ((TIME(L)-T0.LT.0.0001)L=L+1
      IF(T0.GT.TIME(NIN)) GO TO 9999
      FTO = FTO+(F(L)-FTO)/(TIME(L)-T0)*DT
      T0 = T0+DT
      FM = FT0/XM
      YKM = Y1*XK/XM
      Y2D0 = FM-YKM
      YDT = Y2D0*DT**2
      Y2 = 2*Y1-Y0+YDT
      Y0 = Y1
      Y1 = Y2
      G0 T0 9020
9999  STOP
      END
```

INDEKS

A

Acceleration respons spectrum, *84*
Amplitude, *25, 26*
Analisis numerik, *71*
Analisis Ragam Spectrum Respons, *94*
Analisis ragam spektrum respons, *71*
Average respons spectra, *91*

B

Beban dinamis, *1*
Beban statis, *1*
Beban harmonis, *46*
Beban impuls, *27*
Beban sebarang, *28*
Bentuk karakteristik, *53, 55*

C

Cara Hölzer, *55*
Cara Jacobi, *62*
Cara Kecepatan Tetap, *4, 5*
Cara keseimbangan dinamis, *14*
Cara numerik, *2, 4*
Cara percepatan dan kecepatan linier, *12*
Cara β dari Newmark, *13*
Cara β Newmark, *12*
Center of mass, *94*
Center of stiffness, *94*
Characteristic equation, *54*
Characteristic shape, *53, 55*
Characteristic value problem, *55*
Characteristic value, *56*
Characteristic values, *55*
Characteristic vector, *53, 55*
Circular frequency, *43, 52, 53, 93*
Circum Pasifik Belt, *73*
Complementary Solution, *23, 45*
Constant Velocity, *4*
Convolution integral, *45*

Critical damping, *38, 43, 44, 69, 92*

D

D'Alembert, *69*
Damping, *37, 38, 45*
Degree of freedom, *50*
Derajat kebebasan banyak, *50*
Derajat kebebasan, *50*
Design spectrum, *92*
Displacement respons spectrum, *84*
Dynamic Equilibrium, *4, 39, 69*
Dynamic load factor maximum, *47*
Dynamic Load Factor, DLF, *29*

E

Earth crust, *72*
Eigenvalue problem, *55*
Eigenvalues, *55*
Eigenvector, *55*
Elastic Rebound Theori, *77*
Elastoplastis, *20*
Energy yang dilepas, *79*
Energy, *80*
Epicenter, *76*

F

Faktor Beban Dinamis, *28*
First mode, *53*
Focus, *76*
Forced Vibration, *26*
Frekuensi, *44*
Fundamental period, *18*
Fundamental, *53*
Frictional (Coulum) Damping, 39

G

Gaya inersia, *4, 69*
Gaya inertia, *38*
Gempa besar, *81*
Gempa tektonik, *77*
Gempa vulkanik, *77*
Gempa-gempa besar, *77*
Gerakan harmonis, *25*
Gerakan pada pondasi, *38, 69*
Gerakan relative, *38*
Getaran bebas dengan damping, *40*
Getaran bebas, Free Vibration, *24*
Getaran tak bebas, *26*

H

Hypocenter, *76*

I

Impuls, *27*
Inertia force, *4*
Initial Conditions, *4*
Initial displacement, *6*
Inner core, *72*
Integrasi dengan cara numerik, *4*
Integration by Parts [Taylor], *30*
Intensity, *79, 80*
Internal Friction, *39*
Inti dalam, *72*
Inti luar, *72*

J

Jalur Sirkum Pasifik, *73*
Jalur Trans Asiatik, *73*
Japan Meteorogical Agency, *80*
JMA Intensity Scale, *81*
JMA Scale, *80*

K

Karakteristik vektor, *64*
Keadaan awal, *4, 6, 7*
Kegiatan tektonik, *77*
Kerak bumi, *72*
Keseimbangan dinamis, *4*
Koefisien damping, *46*
Komponen horizontal, *81*
Komponen vertikal, *81*
Konstanta per, *2, 3*

L

Lump mass system, *94*

M

Magnitude, *79*
Mantel, *72*
Mantle, *72*
Massa dan per, *94*
Matriks kekakuan, *15*
Modal analysis, *71, 92*
Modal participation factor, *93*
Mode kedua, *53*
Mode of failure, *97*
Mode pertama, *53*
Mode shape, *55, 61, 64*
Mode yang pertama, *18*
Modes, *53*
Modified Mercalli, *80*
Multi Degree of Freedom System, MDOF, *14*
Multidegree of freedom system, *50*

N

Natural circular frequency, *26, 44, 46, 53, 55*
Natural Frequency, *26*
Natural period yang pertama, *18*
Natural period, *1, 7, 8, 25, 26*
Normalized acceleration spectrum, *91*
Normalized characteristic vector, *68*
Normalized respons spectra, *91*
Numerical analysis, *2*
Numerical Integration, *4*

O

Orthogonal, *64*
Outer core, *72*
Over Damping, *41*

P

Particular Solution, *23*
Particular solution, *45*
PENYELESAIAN ANALITIS, *23*
Penyelesaian eksak, *2*
Penyelesaian komplemen, *45*
Penyelesaian komplementer, *23, 25, 26*
Penyelesaian partikulir, *23, 26, 29, 45*
Penyelesaian umum, *29, 45*
Percepatan absolut, *38, 69*
Percepatan awal, *6, 7*
Periode, *44*
Perpindahan tempat awal, *6*
Perpindahan tempat statis, *29*
Persamaan Eigen, *55*
Persamaan homogen, *23*
Persamaan karakteristik, *40, 54, 64*
Persamaan yang terurai, *66, 67*
Prinsip D'Alembert, *4*
Prinsip dinamic equilibrium, *38*
Prinsip dinamic equilibrium dari D'Alembert, *50*
Prinsip strong column weak beam, *96*

Pseudovelocity Respons Spectrum, *85*
Pusat kekakuan, *94*
Pusat massa, *94*

R

Resonansi, *49*
Respons riwayat waktu, *71*
Richter, *79*
Root Mean Square, *94*

S

Second mode, *53*
Setapak demi setapak, *4*
Sifat Orthogonal Mode Shape, *64*
Sifat orthogonal, *65, 66*
Simpangan relatif, *70*
Simpangan tetap, *22*
Single Degree of Freedom System, SDOF, *3*
Sinusoidal, *45*
Sistem massa dan per, *2*
Skala intensitas, *81*
Skala Richter, *79*
Soft storey, *96*
Square Root of Sum of Square (SRSS), *94*
Static equivalent, *71*
Statis deflection, y_{st}, *29*
Step by step, *4*
Strong ground motion, *81*
Strong motion earthquake, *77, 81*
Struktur berderajat kebebasan banyak dengan damping, *68*
Struktur bumi, *72*
Struktur dengan derajat kebebasan satu, *3*
Struktur elastis dengan derajat kebebasan banyak, *14*

T

Teori tektonik lempeng, *77*
Time history analysis, *71*
Torsi, *94*
Trans Asiatik Belt, *73*
Tripartite, *86, 92*

U

Ukuran Gempa, *78*
Unbounded resonance, *49*
Uncoupled, *66, 67*
Under Damping, *43*
Unit impuls, *45*

V

Velocity respons spectrum, Sv, *84*
Viscous damping, *39*

W

Waktu getar, *1*

Z

Zero shock, *79*

MILIK
Badan Perpustakaan
Propinsi Jawa Timur

24